高等教育自学丛书

多项式代数

李师正

山东教育出版社

出版说明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅。书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八二年七月

目　　录

第一章　复数 …… 1
§1.1　数系的扩张 …… 1
§1.2　复数的基本概念 …… 5
§1.3　减法与除法 …… 13
§1.4　复数的表示法 …… 22
§1.5　复数的乘方 …… 37
§1.6　复数的开方 …… 44
§1.7　单位根与原根 …… 51
§1.8　复数系的讨论 …… 59
§1.9　数环与数域 …… 64
本章提要 …… 70
复习题一 …… 71
第二章　一元多项式 …… 74
§2.1　一元多项式的概念 …… 74
§2.2　多项式环 …… 81
§2.3　多项式的整除性 …… 86
§2.4　带余除法 …… 91
§2.5　综合除法 …… 96
§2.6　多项式按另一多项式的方幂展开 …… 101
本章提要 …… 107
复习题二 …… 108
第三章　最大公因式 …… 110
§3.1　最大公因式的概念 …… 110

§3.2 最大公因式的判别方法 ……117
§3.3 多项式的互素 ……123
§3.4 多个多项式的最大公因式 ……129
§3.5 最小公倍式 ……134
本章提要 ……140
复习题三 ……142
第四章 一元多项式的分解 ……145
§4.1 不可约多项式 ……145
§4.2 因式分解定理 ……150
§4.3 有理数域上的不可约多项式 ……156
§4.4 重因式 ……164
本章提要 ……173
复习题四 ……173
第五章 一元 n 次方程 ……175
§5.1 代数基本定理 ……175
§5.2 根与系数之间的关系 ……185
§5.3 方程的变换 ……193
§5.4 三次方程 ……202
§5.5 四次方程 ……215
§5.6 方程的有理根 ……219
本章提要 ……231
复习题五 ……233
第六章 实系数方程 ……236
§6.1 实根的界 ……236
§6.2 斯图姆定理 ……243
§6.3 斯图姆定理的应用 ……250
§6.4 实根的近似计算 ……253
本章提要 ……259

复习题六……271
第七章 有理分式……272
§7.1 一般概念……272
§7.2 有理分式的运算……276
§7.3 数域P上的最简分式……286
§7.4 复数域上的最简分式……296
§7.5 实数域上的最简分式……303
本章提要……309
复习题七……310
第八章 多元多项式……312
§8.1 一般概念……312
§8.2 多元多项式的排项法……319
§8.3 对称多项式……325
§8.4 在一元多项式上的应用……335
§8.5 结式……341
§8.6 判别式……349
§8.7 二元高次方程组……354
* §8.8 结式的行列式表示法……361
本章提要……381
复习题八……383
习题答案与提示……387
【附录】 整数的整除性……422

第一章　复　数

本章首先简述数系的扩张过程，然后介绍复数的概念及复数的运算。最后，引入数环和数域的概念。

§1.1　数系的扩张

一、从自然数系到实数系

在人类社会的实践活动中，从生产到科学研究、军事活动以至日常生活，人们不仅需要定性地了解和讲述问题，同时更需要定量地剖析事物的数量特性，而只有后者才能更精确更完备地揭示事物的本质。社会发展到今天，可以说，没有一门科学（甚至是社会科学）不与数量关系有密切的联系。

数是用来表示量的，是量的一种抽象。然而，数并非一开始就是现在的样子，它的发展经历了一个漫长的过程。

最简单的数是自然数，即正整数。幼儿在咿呀学语时，就开始接受自然数方面的启蒙教育，比如“一只小白兔”、“两个大苹果”、“三块糖”等，这些问题看起来自然是十分简单的，但是，它与人类最初对于数与量的认识却很相似。远在人类的原始阶段，不仅没有文字，也没有数字符号，人们只用结绳、刻画等方法来表示人或物的个数。通过长期的实践活动，人们才渐渐具备了把具体事物的个数抽象为自然

数的能力，并且能对自然数进行运算。这里，我们不打算详细地讨论自然数的发展过程，但有一点应当肯定的是：人类对数的认识是先从自然数开始的。

1，2，3，4，……这无穷多个自然数所组成的数系，称为自然数系，我们用N表示。显然，任意两个自然数的和与积仍是自然数。形象地说，自然数系N关于加法与乘法是“封闭的”。即自然数相加或相乘，其结果不会“跑”出自然数系。

在自然数系内，虽然能进行乘法运算，但不能通行乘法的逆运算——除法。也就是说，对于任意的自然数a与b，方程$bx=a$在自然数范围内不一定有解。例如，方程$2x=3$在自然数系中就没有解。

同时，实践中对测量的要求不断提高，仅靠自然数已不能满足较高的要求，这就促使了正分数的产生。有了正分数，也就是正有理数，可以在其中通行加、乘、除三种运算。这是数系的第一次扩张。

扩张后的数系叫做正有理数系，记为Q^+。

在Q^+中虽然可以通行加法、乘法和除法，但加法的逆运算——减法，在Q^+中仍不能通行。也就是说，对于任意的正有理数a与b，方程$a+x=b$在Q^+中不一定有解。比如方程$2+x=\frac{3}{2}$在Q^+中就不存在解。为了使减法在Q^+中能够通行，还必须再次扩张数系。另外，实践中也常需要考虑带方向的测量以及负债等问题，因而导致负有理数及数零的出现。负数和零的引入，相对来说是较晚的。在五世纪的印度，虽有人用正负数来表示财产和负债，但像“+”、“-”

这样现在通行的记号，到1489年才由德国数学家维得曼(Widman)首次引进，直至十七世纪，关于负数才有较完整的理论和认识。

Q^+添上负有理数和零，得到了有理数系，记为Q，在Q中可以进行加、减、乘、除四种运算（但除法不允许零作除数），或者说，Q关于加、减、乘、除四种运算封闭。

随着生产的发展和测量的精确化，早在古希腊，已有人知道不可公度线段的存在。如一个边长为1的正方形，其对角线长就不可能等于任何一个有理数，也就是说，方程$x^2=2$在Q中没有解。此外，像圆周率π这样的数，也不能包含在有理数系Q内。这就需要进行数系的第三次扩张，即由有理数系扩张为实数系。历史上，在十七——十八世纪时，还只是利用数轴上的点表示实数，实数的理论直到十九世纪七十年代才由康托儿(Cantor)、狄特金(Dedekind)及维尔斯特拉斯(Weierstrass)等人注完成。

实数系用R表示。在R中不仅如同在Q中那样，通行四则运算，而且可进行非负数开方。

二、复数系的产生

实数系R建立之后，R关于四则运算及非负数开方都可进行，但负数开偶次方仍然不能进行。从方程上来说，最简单的方程$x^2+1=0$在实数范围内就没有解。实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$$

注　G.Cantor（1845—1918），R.Dedekind（1831—1916）和K.Weierstrass (1815—1897) 都是德国数学家。

当$b^2-4ac<0$时，就出现无实根的情况。在古代，数学家解二次方程遇到这种情况，就认为没有意义，是虚无的。“虚数”之名，正反映了人们起初时对它的认识。

1747年，达朗贝尔(D' Alembert)对于虚数给出了类似于实数的运算法则，提出$a+b\sqrt{-1}$的形式，但他还未给出“复数的概念。“复数”的名称是十九世纪高斯(Gauss)引进的。但最早对复数作出系统论述的，要算欧拉(Euler)了，注他创造并运用了符号“i”。欧拉之后，外塞尔(Wessel)和阿拉贡(Argand)在十八世纪末和十九世纪初首先提出复数的几何解释；1811年高斯在数学上正式用平面上的点来表示复数。复数的几何解释一俟出现，复数的研究便突飞猛进。十九世纪，由于柯西(Cauchy)、黎曼(Riemann)注和维尔斯特拉斯的大量工作，在复数的基础上建立和发展了一门完整的数学分支——复变函数论。这一门学科在力学、理论物理、工程等方面有着广泛的应用，并且早已渗透到数学的各个分支，成为极其重要的理论和方法。

实数系增加上全部虚数后，构成复数系，用C表示。C不仅对四则运算通行无阻，而且可在其中进行任意次的开方运算。特别重要的是，正如以后将要看到的那样，任意次的代数方程在C中都有解。

三、扩张的原则

从自然数系到复数系，大体上经历了四个扩张过程。每

注 J.R.D' Alembert（1717—1783），法国数学家．C.F.Gauss（1777—1855），著名德国数学家．L.Euler（1707—1783），瑞士数学家．

注 A.L.Cauchy（1789—1857），法国数学家．G.F.B.Riemann(1826—1866），德国数学家．

次扩张，一方面是客观实践的需要，另一方面，在数学上都是为着解决施行某种运算的问题而引起的。

综合各次扩张过程，可归纳为以下几点：

第一，每次扩张总是从一个较小的旧数系扩充为一个较大的新数系，使旧数系成为新数系的一部分。

第二，旧数系中所有能够进行的运算，在新数系中仍然有意义。而且，旧数系中的数，在看作新数系中的数进行运算时，其运算结果与它们在旧数系中完全相同。

第三，旧数系中不能通行的某种运算（如自然数系中的除法，正有理数系中的减法等），在新数系中能够通行。

第四，新数系是旧数系满足以上三个要求的最小扩张，而且由旧数系所唯一决定。

注意：前两条说明，数系的扩张不仅使数的范围扩大了，而且使旧数仍保持原有的运算；第三条说明扩张的主要目的；第四条说明扩张的最小性和唯一性，如N扩张到Q^+，是为了能进行除法运算，所以只扩张到正有理数系，而不是扩张到Q、R或C。关于扩张的最小性和唯一性，这里还没有条件严格论证，读者暂时只能体会它的含意。

上述扩张过程可表示如下：

自然数系$N\longrightarrow$正有理数系$Q^+\longrightarrow$有理数系$Q\longrightarrow$实数系$R\longrightarrow$复数系C。

从小学到中学在学习数的概念时，也基本上按照这一顺序进行。

§1.2 复数的基本概念

数的概念由自然数扩张到实数，也可以借助于数轴作直

观的几何解释。每个数在数轴上对应于一个唯一的点，这点的坐标等于该数。自然数对应于右半轴的整点，整数对应于整个数轴的整点，有理数则对应于坐标为有理数的点。这时，数轴上还有许多点没有数与之对应。直到数系扩张到实数系后，数轴上的全部点才都有唯一对应的数，而且任何实数在数轴上都有唯一的对应点。

现在，我们把点从数轴扩大到整个平面上来。平面上的点显然不能用一个实数表示出来，而必须用一对有次序的实数来表示。我们让平面上的点，或者让一对有次序的实数来代表一个复数。基于这个想法，可把复数的最基本的概念归纳为下面五条基本定义，从这五条出发，又可以建立复数系的代数理论。

一、基本定义

基本定义1 由一对有次序的实数a和b唯一确定的新元素，记为(a,b)，称为复数。

注意：用(a,b)记复数与通常复数的记号$a+bi$看来有所不同，但下面还要讲到，它们是一致的。我们这样来定义复数，目的是使复数理论建立在比较严格的基础上。因为在定义复数加法之前，使用$a+bi$来定义复数，会与加法概念发生混淆。

基本定义2 两个复数(a_1,b_1)和(a_2,b_2)，当$a_1=a_2$且$b_1=b_2$时，规定为相等，并且只有这时，它们才相等，记为$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$。

或者说，$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$当且仅当$a_1=a_2$及$b_1=b_2$时成立。

基本定义3 形如$(a,0)$的复数，规定等于实数a，即$(a,0)=a$。

基本定义4 复数(a_1+a_2,b_1+b_2)称为复数(a_1,b_1)与(a_2,b_2)的和。即

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2). \qquad (1)$$

基本定义5 复数$(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$称为复数$(a_1,b_1)$和$(a_2,b_2)$的乘积。即

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+a_2b_1). \qquad (2)$$

注意：基本定义1给出复数的定义，第2给出复数相等的定义，第3说明实数与复数之间的关系，第4、5规定了复数的加法和乘法。

首先，我们来看实数系和复数系的关系。

由基本定义3，对于任意的实数a，都有一个复数$(a,0)$和它相等。而且由基本定义2知，不同的实数所对应的复数也不相同。同时，两个实数a_1及a_2在实数系中作加法、乘法运算，与将其看作$(a_1,0)$及$(a_2,0)$时在复数系中作相应运算的结果完全一致。事实上，

$$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0+0)=(a_1+a_2,0),$$

$$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1\cdot a_2-0\cdot 0,a_1\cdot 0+a_2\cdot 0)$$
$$=(a_1a_2,0).$$

这样，我们可以把形如$(a,0)$的全体复数就看作是实数系。因而，复数系包含实数系，并且保持实数系原来的运算。

定义1 $i=(0,1)$称为虚数单位。

推论1 $i^2=-1$,

证明： 由基本定义5，

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)$$

$$=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+0\cdot 1)=(-1,0)=-1.$$

推论2 $(a,b)=a+bi$。

证明： $a+bi=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)$

$$=(a,0)+(b\cdot 0-0\cdot 1,b\cdot 1+0\cdot 0)$$

$$=(a,0)+(0,b)=(a,b).$$

证毕。

推论2把复数(a,b)与常见的形式$a+bi$统一起来了。今后我们就用$a+bi$表示复数，而不用(a,b)的形式。

根据复数的基本定义4与5知，复数$a+bi$的加法和乘法规则如下：

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

定理1 复数的加法与乘法都满足交换律与结合律；复数的乘法关于加法满足分配律。即对于任意的复数$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，$z_3=a_3+b_3i$，以下等式成立：

$z_1+z_2=z_2+z_1$；（加法交换律）； （3）

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；（乘法交换律）； （4）

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$；(加法结合律) （5）

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$；(乘法结合律) （6）

$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$. （分配律） （7）

证明：（3）至（7）根据基本定义均可直接证出。下面我们以（7）式为例加以证明，其余各式，读者可作为练习。

（7）式左端：$z_1\cdot(z_2+z_3)$

$$=(a_1+b_1i)[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i]$$

$$=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+[a_1(b_2+b_3)$$
$$+(a_2+a_3)b_1]i$$
$$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1$$
$$+a_3b_1)i.$$

(7)式右端：$z_1 \cdot z_2+z_1 \cdot z_3$

$$=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)$$
$$=[(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i]+[(a_1a_3-b_1b_3)$$
$$+(a_1b_3+a_3b_1)i]$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3$$
$$+a_3b_1)i.$$

证毕。

由于复数的加法和乘法满足通常所熟知的运算规则，因此，它与通常多项式加法和乘法的运算规则是完全一致的。这样，在复数运算中只要记住$i^2=-1$，即可按多项式的加法和乘法进行计算。例如，

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_2b_1i+a_1b_2i+b_1b_2i^2$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

二、复数的分类

定义2 复数$z=a+bi$中，a称为z的实部，bi称为z的虚部，b称为虚部系数。

如$2+3i$的实部为2，虚部为$3i$，虚部系数为3．

定义3 不是实数的复数称为虚数。即形如$z=a+bi$（$b\neq 0$）的复数是虚数。

注意：许多读者往往把复数同虚数混为一谈，在此，再次提请读者注意。

定义4 实部为零的虚数称为纯虚数。即形如 $0+bi$（$b\neq 0$）的复数是纯虚数。

如 $2+3i$ 是一个虚数，但不是纯虚数；$0+3i$ 是纯虚数，$0+0i$ 是一个实数，而不是虚数。

因而复数可作如下分类：

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(a+0i)$
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数
        - 零
        - 负整数
      - 分数
    - 无理数
  - 虚数 $(a+bi,\ b\neq 0)$
    - 纯虚数 $(0+bi,\ b\neq 0)$
    - 非纯虚数 $(a+bi,\ a\neq 0,\ b\neq 0)$

三、例题

例1 计算 $(2+3i)[(4-2i)+(2+i)]$。

解： $(2+3i)[(4-2i)+(2+i)]$

$=(2+3i)(6-i)=15+16i$。

例2 解方程 $(2+i)x+(-3+3i)y=1-4i$，其中 x，y 为实数。

解：由复数相等的定义，可将方程化为实数系中的两个方程

$$\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x+3y=-4. \end{cases}$$

解得 $x=-1$，$y=-1$。

例3 计算 i^n（n 为自然数）。

注意：复数的乘方，规定为同一复数的自乘，所以乘方的运算规则也与实数相同。

解：$i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=i^2\cdot i=-i$，

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$，$i^5=i^4\cdot i=i$，

$i^6=i^4\cdot i^2=-1$，……

一般地，若n被 4 除的余数为r，即$n=4k+r$，其中r为0，1，2或3，则有

$$i^n=i^{4k+r}=i^{4k}\cdot i^r=i^r.$$

因此

$$i^n=\begin{cases}1，当n=4k时；\\ i，当n=4k+1时；\\ -1，当n=4k+2时；\\ -i，当n=4k+3时.\end{cases}$$

所以，i^n关于n具有周期性，其周期为4。

例4 当实数k为何值时，复数$z(k)=(k^2-6k+5)+(k^2-5k+4)i$为实数、虚数或纯虚数？

分析：根据定义3、4，只须检查$z(k)$的虚部系数和实部系数何时为零即可。

解：（1） $z(k)$当且仅当其虚部系数为零时是实数。即$k^2-5k+4=0$，亦即$k=4$或1。

（2） $z(k)$当且仅当$k\neq4$和1时是虚数。

（3） $z(k)$当且仅当它的实部为零且虚部不为零时是纯虚数。

方程$k^2-6k+5=0$的根是实数5和1。但当$k=1$时，$z(k)$的虚部也是零，因而，这时$z(k)$不是纯虚数。所以当且仅当$k=5$时，$z(k)$是纯虚数。

例5 实数k和l取何值时，复数

$$(k-2l)+(3l+1)i=(3k+l)-5ki? \qquad (8)$$

解：上式等价于以下两式：

$$\begin{cases} k-2l=3k+l, \\ 3l+1=-5k. \end{cases}$$

解得$k=-\frac{1}{3}, l=\frac{2}{9}$。故当且仅当$k=-\frac{1}{3}, l=\frac{2}{9}$时，(8)式成立。

习 题 1.2

1. 计算：

（1） $(2-i)^2$；

（2） $(3+i)i+(4i+2)(i-1)$；

（3） $(1-2i)(1+2i)$；

（4） $(2-3i)^2(2+3i)^2$；

（5） $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$；

（6） $(1+2i)^6$；

（7） $i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{200}$。

2. 设a,b,c为实数，$\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，证明：

（1） $\varepsilon^3=1$；

（2） $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$；

（3） $(1-\varepsilon+\varepsilon^2)(1+\varepsilon-\varepsilon^2)=4$；

（4） $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$

$=(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$；

（5） $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)=a^3+b^3$。

3.解方程：

（1） $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$；

（2） $3x-2i+1+(3i+1)y=2-3i$；

（3） $(3x-4)+(y+3)i=0$；

（4） $(x^2-y^2)+2xyi=8+6i$。

其中x，y都是实数。

4.设$z_1=1+2i$，$z_2=2+i$，试确定当实数k_1和k_2为何值时，$k_1z_1+k_2z_2$是：（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数？

§1.3 减法与除法

一、共轭复数

定义1 复数$a-bi$ 称为复数$a+bi$的共轭复数。z的共轭复数记为$\overline{z}$。

显然$\overline{z}$的共轭复数仍是z，即共轭复数的共轭复数是原复数。因此，“共轭”是相互的。

如$2-3i$的共轭复数是$2+3i$，$2+3i$的共轭复数又是$2-3i$。

推论1 任意复数z与其共轭复数$\overline{z}$的和及积都是实数。

证明：设$z=a+bi$，则$\overline{z}=a-bi$。因此，

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

推论2 $z\cdot\bar{z}=0$当且仅当$z=0$时成立。

证明： 设$z=a+bi$。由于$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$，故$z\cdot\bar{z}=0$等价于$a=0$且$b=0$，即$z=0$。

推论3 $z=\bar{z}$当且仅当z为实数时成立。

证明： $z=\bar{z}$即$a+bi=a-bi$（这里$z=a+bi$），故$b=-b$，$b=0$。就是说，$z=\bar{z}$当且仅当z的虚部为0，即z为实数时成立。

推论4 $z=-\bar{z}$当且仅当$z=0$或z是纯虚数时成立。

证明： $z=-\bar{z}$意即$a+bi=-(a-bi)=-a+bi$（这里$z=a+bi$），或$a=-a$，$a=0$。所以，$z=-\bar{z}$当且仅当z的实部为零，也就是当$z=0$或z为纯虚数时成立。

推论5 两复数之和或积的共轭复数，等于其共轭复数的和或积。

证明： 设$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，则

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}\\&=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i\\&=(a_1-b_1i)+(a_2-b_2i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2}&=\overline{(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)}\\&=\overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i}\\&=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)i;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2&=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)\\&=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)i.\end{aligned}$$

所以$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$。推论得证。

推论5可以推广到多个加数或因子的情况。

例1　求满足$2\overline{z}+i=z+1$的复数z。

解：设$z=x+yi$，则$\overline{z}=x-yi$，而

$$2\overline{z}+i=2x+(1-2y)i, \quad (1)$$

$$z+1=(x+1)+yi. \quad (2)$$

由（1）=（2），得$2x=x+1$，$1-2y=y$。解得$x=1$，$y=\frac{1}{3}$。所以$z=1+\frac{1}{3}i$。

例2　求满足$\overline{z}=z^2$的复数z。

解：设$z=x+yi$，则$\overline{z}=x-yi$，

$z^2=(x+yi)(x+yi)=(x^2-y^2)+2xyi$。

由条件$\overline{z}=z^2$，对比实部和虚部，则有

$$x^2-y^2=x, \quad (3)$$

$$2xy=-y. \quad (4)$$

由（4），$(2x+1)y=0$，得$y=0$或$2x+1=0$，即$x=-\frac{1}{2}$。

将$y=0$代入（3），得$x^2=x$，$x(x-1)=0$，因而$x=0$或$x=1$；

再将$x=-\frac{1}{2}$代入（3），得$\frac{1}{4}-y^2=-\frac{1}{2}$，$y^2=\frac{3}{4}$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

因而共得四组解：

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{1}{2}, \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{1}{2}, \\ y_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

所以，满足$\overline{z} = z^2$的复数是

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

二、减法与除法

定义2 设z_1和z_2是两个复数，满足$z_2 + z = z_1$的复数z，称为z_1减z_2的差，记为$z = z_1 - z_2$。

下面的定理说明差的存在与唯一。

定理1 对于任意的复数z_1和z_2，z_1减z_2的差总是存在的，且是唯一的。

证明： 设$z_1 = a_1 + b_1 i$，$z_2 = a_2 + b_2 i$。

(1) 证差的存在性（即证明一定有满足$z_2 + z = z_1$的z存在）。

事实上，取$z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$，则$z$可满足差的定义，这是因为

$$\begin{aligned} z_2 + z &= (a_2 + b_2 i) + [(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i] \\ &= a_1 + b_1 i = z_1. \end{aligned}$$

(2) 证差的唯一性（即证明满足差定义的z只能有一个）。

事实上，设$z = x + yi$是z_1减z_2的差，那末，由于$z_2 + z$

$=z_1$，即

$$a_1+b_1i=(a_2+b_2i)+(x+yi)=(a_2+x)+(b_2+y)i,$$

按照复数相等的定义，必有

$$\begin{cases}a_1=a_2+x, & (5)\\ b_1=b_2+y. & (6)\end{cases}$$

于是$x=a_1-a_2$，$y=b_1-b_2$。

这就是说，复数z_1与z_2的差只能有一个，即$z=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$。

证毕。

现在转入对复数商的讨论。

定义3 对于任意的复数z_1和$z_2\neq0$，若有复数z满足$z_2\cdot z=z_1$，则称z为z_2除z_1的商，或者z_1被z_2除的商，记为$z=\frac{z_1}{z_2}$，或$z=z_1\div z_2$。

定理2 对于任意的复数z_1和$z_2\neq0$，则z_1被z_2除的商总是存在的，且是唯一的。

证明： 设$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$。

(1) 商的存在性。

取$z=\frac{1}{z_2\cdot\overline{z}_2}\cdot(z_1\cdot\overline{z}_2)$，

（**注意：** $z_2\cdot\overline{z}_2$由推论1是实数，又由$z_2\neq0$，根据推论2知，$z_2\cdot\overline{z_2}\neq0$，因而$\frac{1}{z_2\cdot\overline{z}_2}$是一个实数。上式把$z$表示为一个实数与一个复数$z_1\cdot\overline{z}_2$的积，是有意义的。）

则$z_2\cdot z=z_2\left[\frac{1}{z_2\cdot\overline{z_2}}\cdot(z_1\cdot\overline{z}_2)\right]$

$$=\frac{1}{z_2\cdot\overline{z}_2}\cdot z_1\cdot(\overline{z}_2\cdot z_2)=z_1.$$

所以，z符合定义要求。

（2） 商的唯一性。

设商为z，由商的定义，

$$z_2\cdot z=z_1. \tag{7}$$

（7）式两端同乘$\overline{z}_2$，得

$$\overline{z}_2z_2z=z_1\overline{z}_2. \tag{8}$$

由于$z_2\neq0$，根据推论1、2，$\overline{z}_2z_2$是一个不等于零的实数，所以（8）式两端可同时乘以实数$\frac{1}{z_2\cdot\overline{z}_2}$，得

$$z=\frac{1}{z_2\overline{z}_2}(z_1\overline{z}_2). \tag{9}$$

这就说明，满足商定义的复数只能是上面所说的复数z，因而是唯一的。

推论6 设$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i\neq0$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i. \tag{10}$$

证明： 由定理2的证明，商

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{z_2\cdot\overline{z}_2}(z_1\cdot\overline{z}_2)=\frac{1}{a_2^2+b_2^2}[(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)]=\frac{1}{a_2^2+b_2^2}[(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i].$$

推论6指出如何由z_1和z_2求出其商$\frac{z_1}{z_2}$，在实际作除法

时，不必硬记商的公式（9）、(10)，可用下面的方法来作：对于商$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$，让被除数和除数同乘以$a_2-b_2i$，可使除数化为实数（这一工作也称为“实化”分母），即

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

到此为止，我们已经掌握了复数的加法、乘法及其逆运算减法与除法，并证明了四则运算在复数系内可以实施，而且，结果总是一个唯一的复数（除法的除数不能是零）。所以，复数系C关于四则运算封闭。

例3 计算$\frac{2-i}{1+2i}$。

解： $\frac{2-i}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$$=\frac{-5i}{1^2+2^2}=-i.$$

例4 计算$\frac{1}{i}$。

解： $\frac{1}{i}=\frac{i}{i\,i}=\frac{-i}{1}=-i$.

例5 计算$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$。

解： 原式$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}i)(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)}$

$$-\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}i)\ (\sqrt{3}+\sqrt{5}i)}$$

$$=\frac{5-3+2\sqrt{15}i}{5+3}-\frac{3-5+2\sqrt{15}i}{5+3}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例6 解方程组

$$\begin{cases}(2+3i)z_1+(3-2i)z_2=1+8i, & (11)\\ (3-2i)z_1-(6+3i)z_2=8-5i. & (12)\end{cases}$$

其中z_1、z_2为复数。

解：由(11)(12)，得$z_1=\dfrac{1+8i}{2+3i}-\dfrac{3-2i}{2+3i}z_2$

$$=\frac{8-5i}{3-2i}+\frac{6+3i}{3-2i}z_2.$$

或 $\dfrac{1+8i}{2+3i}-\dfrac{8-5i}{3-2i}=\left(\dfrac{6+3i}{3-2i}+\dfrac{3-2i}{2+3i}\right)z_2.$

因而，$z_2=\dfrac{(1+8i)(3-2i)-(8-5i)(2+3i)}{(6+3i)(2+3i)+(3-2i)^2}$

$$=\frac{-12+8i}{8+12i}=\frac{(-12+8i)(8-12i)}{(8+12i)(8-12i)}$$

$$=\frac{208i}{208}=i.$$

$$z_1=\frac{1+8i}{2+3i}-\frac{(3-2i)i}{2+3i}=\frac{-1+5i}{2+3i}=1+i.$$

故方程组(11)(12)的解是$z_1=1+i$，$z_2=i$。

例7 计算$i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^n$。

解：设$S_n=i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^n$。

则 $$iS_n = i^2 + i^3 + i^4 \cdots + i^{n+1}.$$

$$S_n - iS_n = i - i^{n+1}.$$

所以 $$S_n = \frac{i - i^{n+1}}{1-i} = \frac{(i - i^{n+1})(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{i(1+i)(1-i^n)}{2}.$$

习 题 1.3

1. 求适合$2\overline{z} - z = 3z + 2i + 1$的复数$z$。

2. 计算：

(1) $\overline{\overline{(2i-1)}\cdot(3i+2)} + (2-i)\overline{(4+2i)}$;

(2) $\overline{1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}$;

(3) $(a+bi)^3 + \overline{(a+bi)}^3$.

3. 证明：

(1) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$;

(2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$. $(z_2 \neq 0)$

4. 求i^{-n}，其中n为正整数。

5. 计算：

(1) $\frac{1}{1+i}$;

(2) $\frac{2+i}{(2+2i)(3-i)}$;

(3) $\frac{(1+i)^2}{2-i}$;

(4) $\frac{(-1+\sqrt{2}i)^4\ (-1-\sqrt{2}i)^4}{(\sqrt{2}+i)^4\ (\sqrt{2}-i)^4}$.

6. 求适合下列条件的z_1和z_2：

$$\begin{cases}(3+i)z_1+(3-i)z_2=16,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=14.\end{cases}$$

7. 将推论5推广到一般情形，即证：

（1）$\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\cdots+\overline{z}_n$；

（2）$\overline{z_1\cdot z_2\cdots z_n}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\cdots\overline{z}_n$。

8. 设$z_2\neq0$，$z_4\neq0$，证明：

（1）$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{zz_1}{zz_2}$；　$(z\neq0)$

（2）$\dfrac{z_1}{z_2}\pm\dfrac{z_3}{z_4}=\dfrac{z_1z_4\pm z_2z_3}{z_2z_4}$；

（3）$\dfrac{z_1}{z_2}\cdot\dfrac{z_3}{z_4}=\dfrac{z_1z_3}{z_2z_4}$；

（4）$\dfrac{z_1}{z_2}\div\dfrac{z_3}{z_4}=\dfrac{z_1z_4}{z_2z_3}$；　$(z_3\neq0)$

（5）若$z_1z_4=z_2z_3$，则$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_3}{z_4}$；反之亦对。

§1.4　复数的表示法

一、几何表示法

在基本定义中知道，复数$z=(a,b)$由一对有次序的实数a、b唯一决定。若把(a,b)设想成平面直角坐标系中的点，就可以使复数与平面上的点建立对应关系。

作平面直角坐标系。对于任一复数$z=a+bi$，我们用横坐标为a纵坐标为b的点M来表示它。显然：

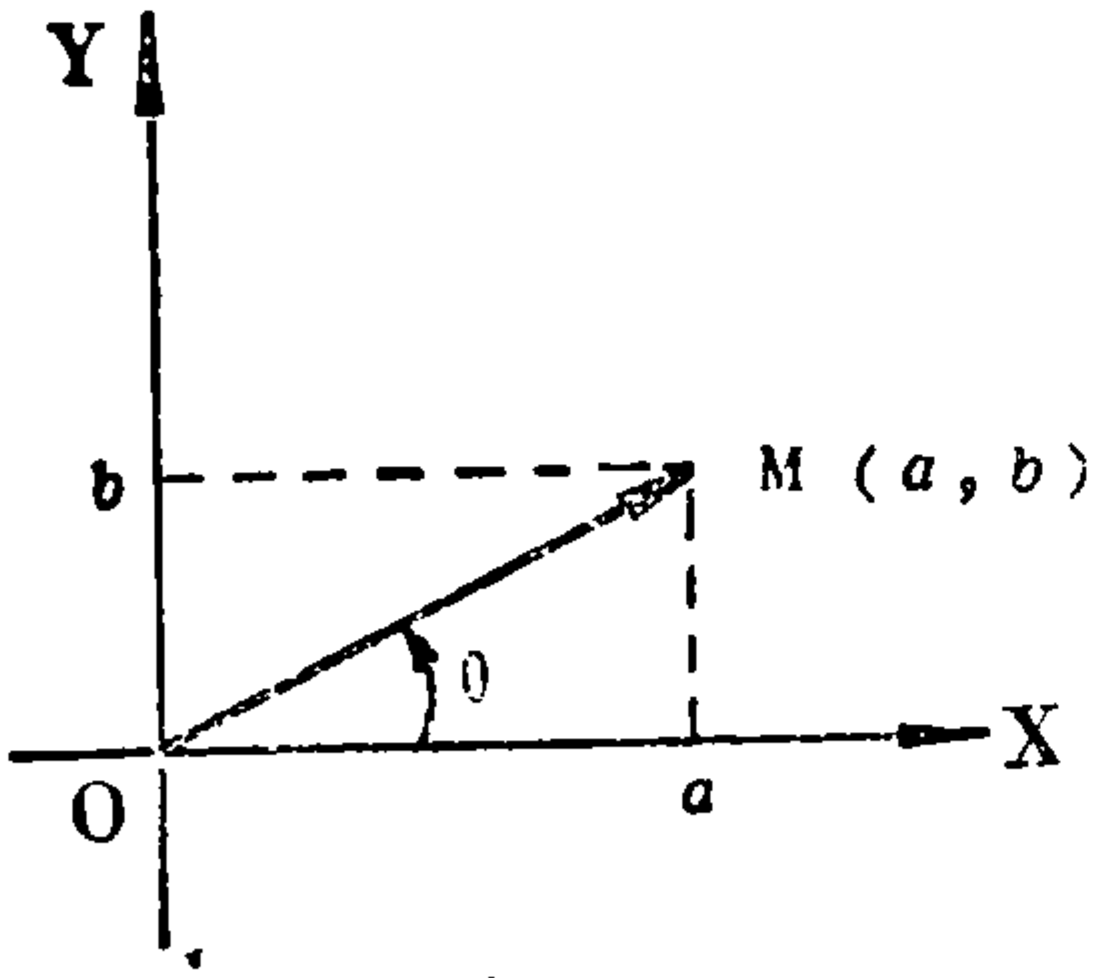


图1

第一、任一复数在平面上有唯一的对应点；

第二、平面上的任一点必有复数与之对应；

第三、不同复数对应的点也不同。

注意：复数与点的上述对应通常称为一一对应。

横轴上每个点的纵坐标都是0，对应的复数都是实数。因此，横轴称为实轴；同样，纵轴上的点，除原点外，对应的复数都是纯虚数，因而纵轴称为虚轴。

用点表示复数的平面称为复平面，或高斯平面。

若把原点O和点M连接起来，便得到一个向量$\overrightarrow{OM}$（见图1）。平面上的点和这种起点为原点的向量可以建立一一对应关系，因而复数和平面的向量也存在着一一对应关系。所以，有时为了方便，常常用复数直接表记所对应的点或向量，不会造成混乱。

定义1 称$\sqrt{a^2+b^2}$为复数$z=a+bi$的模，记为$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$。

如$|2-3i|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$；

$|2i|=2$；$|0|=0$。

注意：a^2+b^2是一个非负实数，这里开方是求算术根，因而恒有$|z|\geqslant 0$。

另外，模的几何意义也是十分明显的。由勾股定理知，

模代表对应向量的长度。

推论1 $|z|=0$当且仅当$z=0$。

证明：设$z=a+bi$，则$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=0$当且仅当$a=b=0$，即$z=0$。

定义2 若复数z对应的向量为$\overrightarrow{OM}$，则$\overrightarrow{OM}$与x轴正向的夹角称为z的幅角，记为argz。

如图1，θ就是对应于向量$\overrightarrow{OM}$的复数z的幅角。但幅角不是唯一确定的，$\theta+2k\pi$（k为任意整数）都可以说是z的幅角。

复数$0=0+0i$在平面上对应零向量，可以认为它没有幅角，或者说，它的幅角可取任意值。但0的模是唯一确定的，即$|0|=0$。

另外，易见幅角等于$k\pi$(k为整数)的复数必为实数；幅角不是π的整数倍的复数，一定是虚数；幅角等于$\frac{\pi}{2}+k\pi$（k为整数）的非零复数，一定是纯虚数。

从复数的几何意义可见，任一复数z与它的共轭复数所对应的点正好与实轴对称，因而与$\bar{z}$有共同的模，并且若θ是z的幅角，则$-\theta$是$\bar{z}$的幅角。

例1 求复数$1-i$的模和幅角。

解：(1) $|1-i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$。

(2) 设$1-i$的幅角为θ，那么$\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{1}=-1$。

由于$1-i$对应的向量在第四象限，所以

$$\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\text{为整数})。$$

例2 已知复数z的模是2，幅角是$\frac{4}{3}\pi$，求z。

解：$a=|z|\cos(\arg z)=2\cos\frac{4}{3}\pi=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，

$$b=|z|\sin(\arg z)=2\sin\frac{4}{3}\pi=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\sqrt{3}。$$

故此复数$z=-1-\sqrt{3}i$。

总结以上两例，可以得出下述一般的方法：

(1) 由$z=a+bi$求$|z|$和$\arg z$，则

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}；\qquad(1)$$

$$\operatorname{tg}(\arg z)=\frac{b}{a}。\qquad(2)$$

注意：由$\frac{b}{a}$还不能完全确定$\arg z$，需要根据对应点所在的象限确定一个角，然后再加上$2k\pi$，就得出z的幅角表达式。

(2) 由$|z|$和$\arg z$求z。设$z=a+bi$，那末由复数的几何意义有

$$\begin{cases}a=|z|\cos(\arg z)；\\ b=|z|\sin(\arg z)。\end{cases}$$

所以$z=|z|\cos(\arg z)+i|z|\sin(\arg z)$。 (3)

下面，再来看复数加减法的几何意义。

设有复数$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，其和z_1+z_2

$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$。

如图 2 所示，在复平面上用$\overrightarrow{OM_1}$表示z_1，用$\overrightarrow{OM_2}$表示z_2，根据平面向量的平行四边形法则，作和$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM}$，其中$\overrightarrow{OM}$是以$\overrightarrow{OM_1}$和$\overrightarrow{OM_2}$为邻边的平行四边形对角线代表的向量。由于$\overrightarrow{OM}$对应坐标是$\overrightarrow{OM_1}$和$\overrightarrow{OM_2}$对应坐标的和，故$\overrightarrow{OM}$代表的复数，正是$z_1+z_2=z$。这个法则称为复数的平行四边形法则，与解析几何中向量的加法法则是一致的。

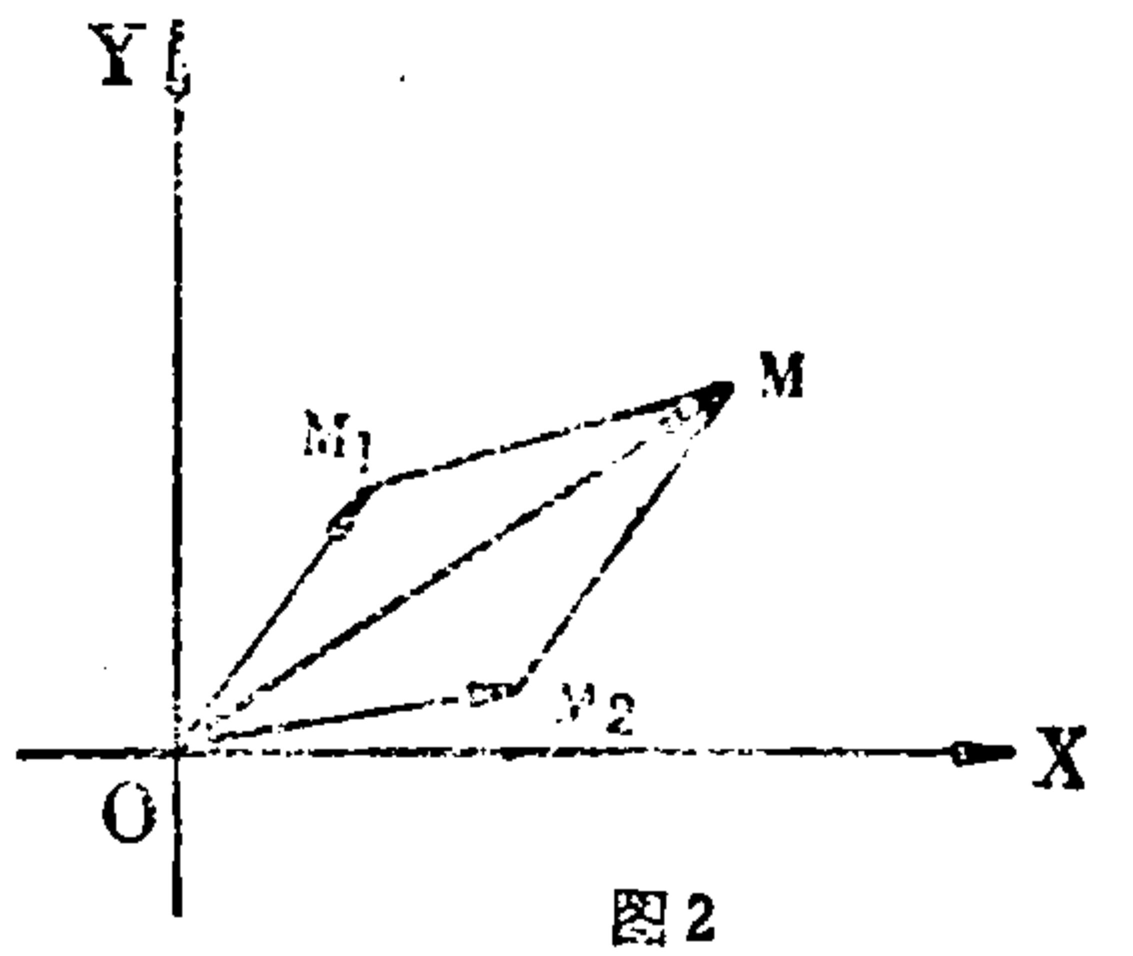


图 2

类似地，可以得出减法法则：

如图 3 所示，过代表z_1的点M_1作直线平行于代表z_2的向量$\overrightarrow{OM_2}$，过 O 点作直线平行于M_2M_1。设两直线交于M点，则向量$\overrightarrow{OM}$对应的复数就是z_1-z_2。

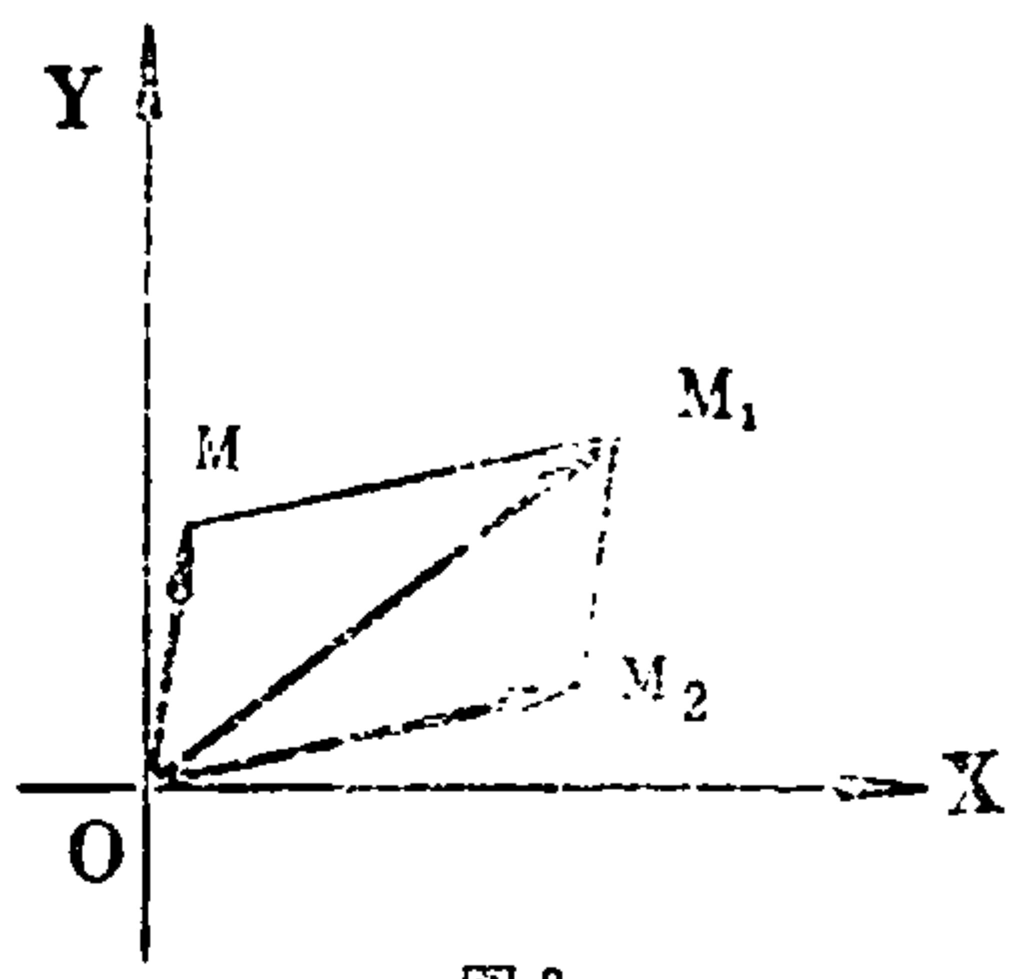


图 3

事实上，由刚才叙述的加法法则知，$\overrightarrow{OM}$对应的复数z与$\overrightarrow{OM_2}$对应的复数z_2之和正好等于$\overrightarrow{OM_1}$对应的复数z_1，即

$z+z_2=z_1$，或$z=z_1-z_2$。所以，$\overrightarrow{OM}$正是所求的向量。

另外，平面上两点间的距离也可化为复数问题。

设M_1、M_2为平面上任意两点，OM_1和OM_2对应的复数为z_1和z_2（见图3）。过O点作$OM \parallel M_1M_2$，使$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_2M_1}$，则$OMM_1M_2$构成平行四边形。因而$|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{M_2M_1}|$。但$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$，因此，$M_1$和$M_2$之间的距离为

$$|\overrightarrow{M_2M_1}|=|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}|=|z_1-z_2|=|z_2-z_1|.$$

所以，平面上两点间的距离，等于这两点对应复数之差的模。

例3 求模为3的复数对应点的轨迹。

解：设$z=x+yi$的模为3，即$\sqrt{x^2+y^2}=3$，$x^2+y^2=9$，因而，对应点在以O为圆心，以3为半径的圆周上。

反之，这个圆周上任意一点所对应的复数的模都是3。

例4 试述点在以M为圆心，以R为半径的圆内部的条件。

解：设$z=x+yi$为圆内点的对应复数，$m=a+bi$为点M对应的复数。则应有

$$|z-m|<R,$$

或 $$R>|z-m|=|(x-a)+(y-b)i|$$
$$=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

所求的条件是

$$(x-a)^2+(y-b)^2<R^2.$$

例5 用复数证明：平行四边形四边的平方和等于两对角线的平方和。

证明： 取平行四边形OM_1M_2M（见图2）的一个顶点O为原点。设两邻边$\overrightarrow{OM_1}$和$\overrightarrow{OM_2}$对应的复数是z_1和z_2，$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$。由于平行四边形对边平行且相等，所以，另外两边$\overrightarrow{M_2M}$和$\overrightarrow{M_1M}$对应的复数也是z_1和z_2。而对角线$\overrightarrow{OM}$和$\overrightarrow{M_2M_1}$对应的复数显然是z_1+z_2和z_1-z_2。这时有

$$
\begin{aligned}
&|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2\\
&=[(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2]+[(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2]\\
&=2(a_1^2+b_1^2)+2(a_2^2+b_2^2)=2|z_1|^2+2|z_2|^2.
\end{aligned}
$$

二、三角表示法

设复数z的模为r，幅角为θ，由(3)式知，

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta,$$

或

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad (4)$$

(4)式称为复数z的三角形式，$z=a+bi$称为z的代数形式。

由三角形式可以得到代数形式；反之，由代数形式，只要确定了模与幅角，即可化为三角形式，两种形式的互化，由(1)至(3)表示。这类似于平面上点的直角坐标与极坐标的互化。

注意1： 三角形式必须写成$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，其中$r\geqslant 0$。如$-2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$不是三角形式，因为

$-2<0$。同样地，$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$和$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6})$也不是三角形式。

注意2： 由于幅角不唯一，代数形式化为三角形式时，任取一个幅角即可。

例6 把$z=1+\sqrt{3}i$化为三角形式。

解： $|z|=\sqrt{1+3}=2$。

$$\operatorname{tg}(\arg z)=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}.$$

由于z在第一象限，故$\arg z=\frac{\pi}{3}+2k\pi$（$k$为整数）。

所以，$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$。

例7 把$z=3-2i$化为三角形式。

解： $|z|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$。

$$\operatorname{tg}(\arg z)=-\frac{2}{3}=-0.\dot{6}.$$

$\arg z$是第四象限的角，查表知：

$$\arg z=326^\circ18'+k\cdot360^\circ（k为整数）.$$

因而，$z=\sqrt{13}(\cos326^\circ18'+i\sin326^\circ18')$。

例8 设a为实数，写出a的三角形式。

解： 若$a\geqslant0$，则$\arg a=0+2k\pi$（k为整数），

$$a=a(\cos0+i\sin0).$$

若$a<0$，则$\arg z=\pi+2k\pi$（k为整数），

$$a=-a(\cos\pi+i\sin\pi).$$

例9 设α是一个大于0小于$\frac{\pi}{2}$的角，试将复数

$z=\frac{1-i\text{tg}\alpha}{1+i\text{tg}\alpha}$化为三角形式。

解：$$z=\frac{1-i\text{tg}\alpha}{1+i\text{tg}\alpha}=\frac{(1-i\text{tg}\alpha)^2}{(1+i\text{tg}\alpha)(1-i\text{tg}\alpha)}$$

$$=\frac{(1-\text{tg}^2\alpha)-2i\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$$

$$=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{2i\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$=\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha$$

$$=\cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha).$$

三、乘法与除法运算

现在，我们用复数的三角形式写出复数乘法与除法的运算法则。设：

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

其积$z_1z_2=(r_1\cos\theta_1+ir_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2+ir_2\sin\theta_2)$

$$=(r_1\cos\theta_1\cdot r_2\cos\theta_2-r_1\sin\theta_1\cdot r_2\sin\theta_2)$$
$$+i(r_1\cos\theta_1\cdot r_2\sin\theta_2+r_1\sin\theta_1\cdot r_2\cos\theta_2)$$
$$=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+ir_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

这就是说，两复数相乘，积的模等于各因子模的积，积的

幅角等于各因子幅角之和，这比代数形式下的乘法法则要简单得多。

下面计算商$\frac{z_1}{z_2}$（其中$z_2 \neq 0$）。

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$$

$$=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]}{r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1r_2[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]}{r_2^2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

就是说，两复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模，商的幅角等于被除数的幅角减去除数的幅角。

设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\rho$为任一非负实数，作乘积$\rho z=\rho r(\cos\theta+i\sin\theta)$。$\rho z$与$z$具有相同的幅角，只是模伸长了$\rho$倍。这相当于平面几何中的相似变换。

又设$z_0=\cos\varphi+i\sin\varphi$。$z_0$代表一个模为1的复数，其对应的向量是一个单位向量。作乘积，

$$z_0z=r[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]。$$

易见，z_0z与z有相同的模，但z_0z的幅角是z的幅角加φ，也可以说，z_0z对应的向量，是由z对应的向量绕原点旋转φ角得到的，相当于平面几何中说的旋转变换。

用任意的复数

$$u=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

来乘z，其积为：

$$uz=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=qr[(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\theta+i\sin\theta)].$$

若令$z_0=\cos\varphi+i\sin\varphi$，则$uz=\rho r[z_0(\cos\theta+i\sin\theta)]=(\rho z)z_0$。

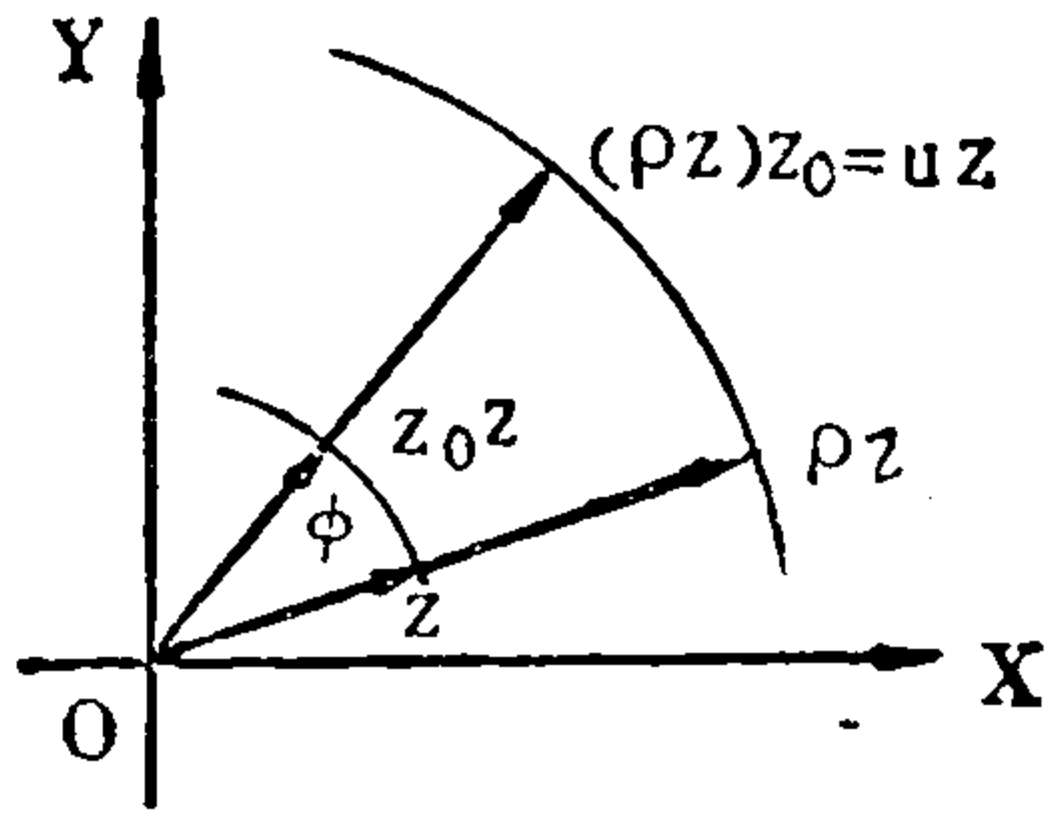


图4

相当于先作相似变换，将z对应的向量在原方向伸长ρ倍，然后，再旋转φ角，这就是乘法的几何意义（如图4）。

例10 计算$(1+\sqrt{3}i)(1+i)$。

解： 由于$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

因而 $(1+\sqrt{3}i)(1+i)$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i\right)$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}+\frac{2+2\sqrt{3}i}{2}$$

$$=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i.$$

例11 计算$\frac{1-i}{2-2\sqrt{3}i}$。

解： $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,

$$2-2\sqrt{3}i=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

因而 $\frac{1-i}{2-2\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right.$

$$\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}-1}{8}i.$$

以上两例应用了特殊角的三角函数值：

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12}=\cos15°$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\frac{7}{12}\pi=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \cos\frac{7}{12}\pi$$

$$=-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

例12 用复数证明下述平面几何问题：

如图 5 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=3AB$，E，F，G，H分别为BC、AD的三个等分点。

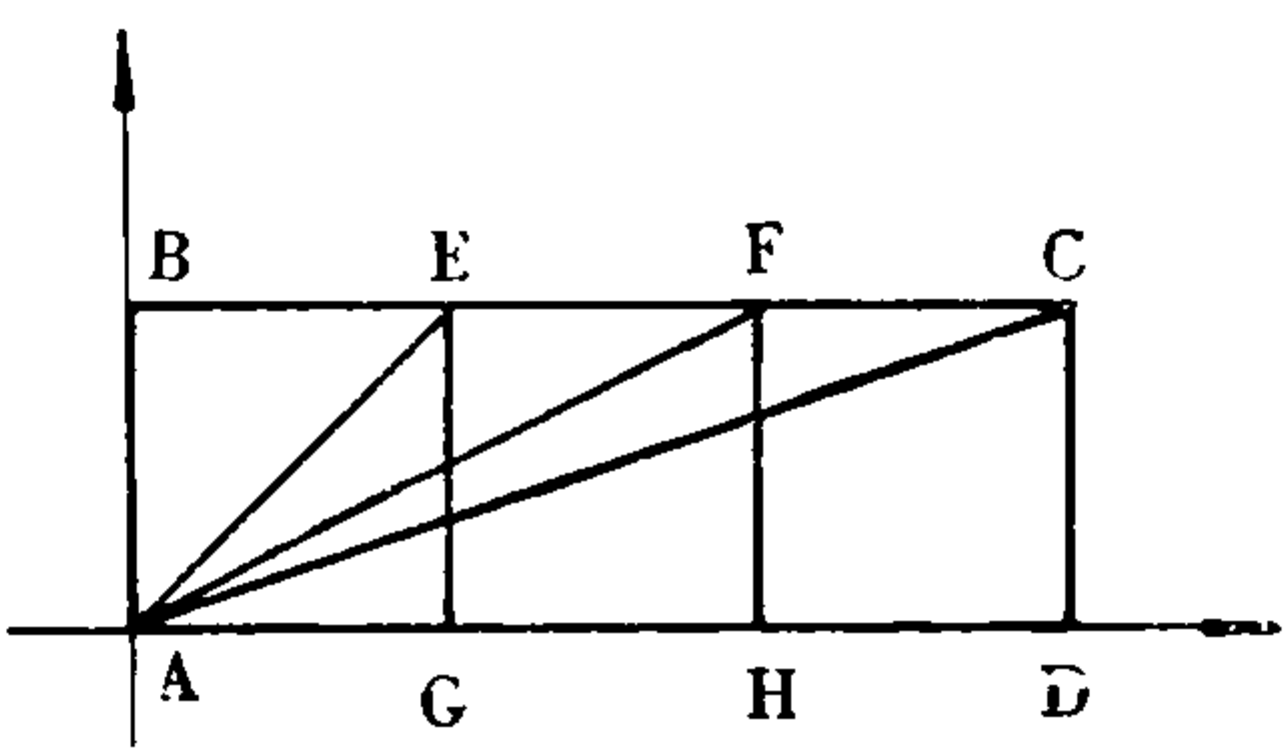


图 5

求证$\angle CAD+\angle FAD+\angle EAD=\frac{\pi}{2}$。

证明：以A为原点，以$\overrightarrow{AD}$为实轴，以$\overrightarrow{AB}$为虚轴，作复平面，向量$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AC}$对应的复数分别是$1+i$，$2+i$，$3+i$。

由于$(1+i)(2+i)(3+i)=10i$是一个纯虚数，其幅角为$\frac{\pi}{2}$。另一方面，由于积的幅角等于各因子幅角之和，所以$1+i$，$2+i$，$3+i$对应幅角的和为$\frac{\pi}{2}$。也即

$$\angle CAD+\angle FAD+\angle EAD=\frac{\pi}{2}.$$

***四、指数表示法**

在复变函数论中知道，指数为复变数的指数函数有如下关系式：

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y). \tag{5}$$

这里e为自然对数的底，(5)式的推导超出我们书的范围，这里就不加证明了。

在(5)式中，若令$x=0$，$y=\theta$，则

$$e^{i\theta}=e^{0+i\theta}=e^{0}(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{6}$$

(6)式称为欧拉公式，其中θ为实数。

复数的三角形式　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$可化为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}. \tag{7}$$

(7)式中$z=re^{i\theta}$称为复数的指数形式。

实际上，指数形式与三角形式之间只有写法上的不同，没有本质上的区别。如

$$z=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$=\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

复数的乘法法则，用指数形式表达是十分简单的。

设$z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，那末

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{8}$$

除法用指数形式表达可写成

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \text{其中} z_2\neq 0. \tag{9}$$

习　题　1.4

1. 证明$z\bar{z}=|z|^2$.

2. 在平面上作出下列复数对应的向量：

（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$；　（2）$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$；

（3）i；　（4）$-1+i$.

3. 复数z_1、z_2满足什么条件时下式成立，并在图上加以说明：

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|.$$

4. 求距离点$p=a+bi$和$q=c+di$相等的点$z=x+yi$的轨

迹。

5.用几何方法求下列复数的和与差，并与代数方法作出的结果对照：

(1) $z_1=2+2i$，$z_2=-1+3i$；

(2) $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$，$z_2=\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i$；

(3) $z_1=1+i$，$z_2=1-i$。

6.把下列复数化为三角形式和指数形式：

(1) 1；(2) $-i$；(3) $1+i$；(4) $-1+\sqrt{3}\,i$；(5) $\sqrt{3}-i$；(6) $-4+4i$；(7) $3-i$。

7.求幅角为$\frac{\pi}{4}$的复数z对应点的轨迹。

8.把下列三角形式化为代数形式：

(1) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$；

(2) $4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$；

(3) $4\sqrt{2}(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi)$；

(4) $2\sqrt{2}(\cos\frac{11}{5}\pi+i\sin\frac{11}{5}\pi)$。

9.在复平面上，从点（2，0）作一条与横轴夹角为45°的射线，这条射线上点的对应复数形式如何？

10.用复数的三角形式计算：

(1) $(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)$；

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)$；

(3) $\dfrac{-1-i}{1+\sqrt{3}\,i}$；

(4) $\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{i(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}$.

11. 利用复数的三角形式，求满足以下方程的复数z：

(1) $2|z|-2iz=1-3i$；

(2) $|z|-z=\dfrac{1}{2}-i$。

12. 求证：

(1) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)\ (\cos\theta+i\sin\theta)}{1-i}$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\theta\right)+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi+\theta\right)\right];$$

(2) $\dfrac{(1+i)\ (1-\sqrt{3}i)\ (\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta-i\sin\theta}$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

13. 若两复数之积为零，求证这两个复数中至少有一个是零。

§1.5 复数的乘方

在§1.4中我们看到，当把复数写成三角形式时，乘法变得十分简单。比如设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

则其积为

$$z=z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]。\qquad(1)$$

上式不难推广到几个因子的情形。

$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots$

$r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

$$= r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]. \quad (2)$$

在(2)式中，令$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r, \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$，则有

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \quad (3)$$

定理1 复数z的n次方幂z^n（n为自然数）的模等于z模的n次方，z^n的幅角等于z幅角的n倍。

定理1称为棣模弗（*De Moivre*注）定理，（3）式称为棣模弗公式。

下面，我们把(3)式推广到n为任意整数的情形。这里假定$z \neq 0$。

当$n = 0$时，仍规定$z^0 = 1$，而(3)右端为$r^0(\cos 0 + \sin 0) = r^0 = 1$，故(3)成立。

当$n < 0$时，设$m = -n > 0$。按负指数的规定，

$$z^n = z^{-m} = \frac{1}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m}$$

$$= \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)}$$

$$= r^{-m}[\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)]$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

所以，棣模弗公式对任意整数n都成立。

例1 计算$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$.

解：原式 $= (\sqrt{2})^4\left[\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]$

注A. De Moivre (1667——1754)，法国数学家.

$$= 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4.$$

例2 计算$[3(1+\sqrt{3}i)]^{-8}$。

解: $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

$$原式 = \left[3\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-8}$$

$$= \frac{1}{6^8}\left[\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{6^8}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

例3 用棣模弗公式把$\sin 3\varphi$和$\cos 3\varphi$通过$\sin\varphi$及$\cos\varphi$表示出来。

分析：由于

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi. \qquad (4)$$

另一方面，(4)式的左端可按二项式定理展开，让实虚部对应相等，便得出所求的表达式。

解：$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$

$$= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

又因 $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$，故

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi. \end{cases}$$

注意：例3是复数在三角上的一个有趣的应用，可以用这一方法推导出$\cos n\varphi$和$\sin n\varphi$的表达式，读者不妨一试。

例4 假定复数$z\neq 0$，且$z+\frac{1}{z}=2\cos\varphi$。

求证： $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\varphi$，其中$m$为自然数。

证明： 由于$z+\frac{1}{z}=2\cos\varphi$，故

$$z^2+1=2\cos\varphi\cdot z,$$

$$z^2-2\cos\varphi\cdot z+1=0.$$

解得 $z=\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$。

(1) 设$z=\cos\varphi+i\sin\varphi$，则$\frac{1}{z}=\cos\varphi-i\sin\varphi$，

$$z^m=\cos m\varphi+i\sin m\varphi,$$

$$\frac{1}{z^m}=\cos m\varphi-i\sin m\varphi.$$

所以，$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\varphi$。

(2) 设$z=\cos\varphi-i\sin\varphi=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$。

则 $$\frac{1}{z}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

$$z^m=\cos(-m\varphi)+i\sin(-m\varphi),$$

$$\frac{1}{z^m}=\cos m\varphi+i\sin m\varphi.$$

所以，$z^m+\frac{1}{z^m}=\cos(-m\varphi)+\cos m\varphi=2\cos m\varphi$。

例5 求和($\varphi\neq 2k\pi$)：

$$S_1=1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\sum_{k=0}^{n}\cos k\varphi;$$

$$S_2=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi=\sum_{k=0}^{n}\sin k\varphi.$$

注意："Σ"是希腊字母（读作sigma，西格玛），表示连加·如$\sum_{k=0}^{n} a_k$表示$a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n$，即形如a_k的若干项的和，k从0开始到n结束。

分析：令$z=\cos\varphi+i\sin\varphi$，则$z^2=\cos2\varphi+i\sin2\varphi$，…，$z^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$。

取$S=1+z+z^2+\cdots+z^n=\sum_{k=0}^{n} z^k$，

显然，$S=S_1+iS_2$.若计算出S，则自然求出S_1和S_2。

解：根据等比级数求和公式

$$S=1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}. \quad (5)$$

由棣模弗公式

$$z^{n+1}=\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi.$$

由(5)式，$S=\dfrac{[\cos(n+1)\varphi-1]+i\sin(n+1)\varphi}{\cos\varphi-1+i\sin\varphi}$

$$=\frac{[\cos(n+1)\varphi-1+i\sin(n+1)\varphi](\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}{(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{1-\cos\varphi+\cos n\varphi-\cos(n+1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$$

$$+i\frac{\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}.$$

因为$S=S_1+iS_2$，所以

$$S_1=\frac{1-\cos\varphi+\cos n\varphi-\cos(n+1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)},$$

$$S_2=\frac{\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}.$$

例6 试求最小的正整数n，使

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^n$$

(1)是实数，(2)是纯虚数。

分析： 把括号内的复数用三角形式表示后，应用棣模弗定理，分别令虚部为零或实部为零，便可得出结果。

解： $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

因而 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right).$$

(1) 要使上式为实数，只须$\sin\frac{n\pi}{12}=0$，故n是12的倍数，满足这个条件的n，最小是12。

(2) 要使上式为纯虚数，只须$\cos\frac{n\pi}{12}=0$且$\sin\frac{n\pi}{12}\neq 0$。$\frac{n\pi}{12}-\frac{\pi}{2}$应是$\pi$的整数倍，也就是说，$n=6+12k$。当$k=0$时，$n=6$是满足条件的最小正整数。

习 题 1.5

1.计算：

(1) $(\sqrt{3}-i)^3$；　　(2) $\dfrac{(1+i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$；

(3) $5i^3(2-2i)^4$；　　(4) $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$。

2. 若n为正整数，证明：

(1) $(1+\sqrt{3}i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$；

(2) $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\varphi}{1-i\operatorname{tg}n\varphi}$，　$(\varphi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi)$；

(3) $(1+\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)^n$

$=\cos\frac{n}{3}\pi+i\sin\frac{n}{3}\pi$；

(4) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$

$=2\cos\frac{2n}{3}\pi$。

3. 设$z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，说明$1$，$z,z^2,\cdots\cdots,z^{n-1}$的几何意义。

4. 设$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，试求满足以下条件的自然数$n$：

(1) z^n为实数；

(2) z^n为虚数；

(3) z^n为纯虚数。

5. 试用$\cos\varphi$和$\sin\varphi$表示$\cos5\varphi$和$\sin5\varphi$。

6. 证明：

(1) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

$=\frac{1}{2}$；

(2) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}$

$= -\frac{1}{2}$.

7. 求和S:

(1) $S = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cos j\alpha$;

(2) $S = \sum_{k=1}^{n} k\varepsilon^{k-1}$, 其中 $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$、

§1.6 复数的开方

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$的平方是$i$，那么我们称$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$是$i$的一个平方根。一般有下面的定义：

定义1 设z是复数。若有复数ω，满足

$$\omega^n = z, \tag{1}$$

则称ω是z的一个n次方根。

注意：定义1只是给出n次方根的定义，还不能说明n次方根的存在。

在实数系中，一个负实数开偶次方是无法做到的。下面我们会看到，在复数系中，任何复数的n次方根总存在，而且当$z \neq 0$时，z的n次方根正好有n个。复数系对开方问题解决得十分完美，显示出了复数系的特点。

假定z的n次方根ω已经找到，让我们看ω与z有怎样的关系。设

$$z = r(\cos\omega + i\sin\omega) \neq 0, \tag{2}$$

$$\omega = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

由于$\omega^n = z$，故由棣模弗公式

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (4)$$

因而
$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\varphi = \theta + 2k\pi. \ (k\text{为整数}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, & (5) \\ \rho = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}. \ (k\text{为整数}) & (6) \end{cases}$$

(5)式中的开方是指非负实数的算术根，其中 ρ 由 r 唯一次定。

把(5)与(6)代入(3)，得

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad (7)$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots)$$

这无穷多个 ω_k 具有以下的性质：

（1） 所有 ω_k 都是 z 的 n 次方根。

事实上，若将(7) n 次乘方，则得

$$(\omega_k)^n = (\sqrt[n]{r})^n\left[\cos n\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin n\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$$

这也说明，任意复数的 n 次方根总是存在的。

（2） 当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时，各 ω_k 两两不同。

事实上，若 k_1 和 k_2 满足 $0 \leqslant k_2 < k_1 \leqslant n-1$，则 ω_{k_1} 和 ω_{k_2} 的幅角 $\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k_1\pi}{n}$ 与 $\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k_2\pi}{n}$ 之差为 $\dfrac{2(k_1 - k_2)\pi}{n}$。

由于 $0 < k_1 - k_2 < n$，$\dfrac{k_1 - k_2}{n}$ 是真分数，故 $\dfrac{2(k_1 - k_2)\pi}{n}$ 小于 2π 而大于0，因此 $\omega_{k_1} \neq \omega_{k_2}$。

（3） 当k取遍一切整数时，所有ω_k最多有n个不同的值。

事实上，任何整数k用n除，可得唯一的余数t和商q，$k=qn+t$，其中$0\leqslant t\leqslant n-1$。

这样一来，我们得到

$$
\begin{aligned}
\omega_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2(qn+t)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(qn+t)\pi}{n}\right]\\
&= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2t\pi}{n}+2q\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2t\pi}{n}+2q\pi\right)\right]\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2t\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2t\pi}{n}\right)=\omega_t.
\end{aligned}
$$

由此可见，不管k是什么整数，在ω_0，ω_1，…，ω_{n-1}中总有一个和ω_k相等。

总结这三个性质，就是下面的定理：

定理1 （开方基本定理）对于任意的复数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq 0$，有且仅有以下$n$个不同的$n$次方根：

$$
\begin{cases}
\omega_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{n}+i\sin\dfrac{\theta}{n}\right);\\
\omega_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2\pi}{n}\right);\\
\cdots\cdots\\
\omega_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).
\end{cases}
\qquad (8)
$$

注意：$z=0$的n次方根是0。

复数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$的$n$次方根的几何意义很明

显。在复平面上，这些方根对应的点在以原点为心，以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上。相邻两个方根的幅角相差$\frac{2\pi}{n}$，所以它们正好把这个圆周分成n等分。这些点依次相连，即得正n边形（见图6）。

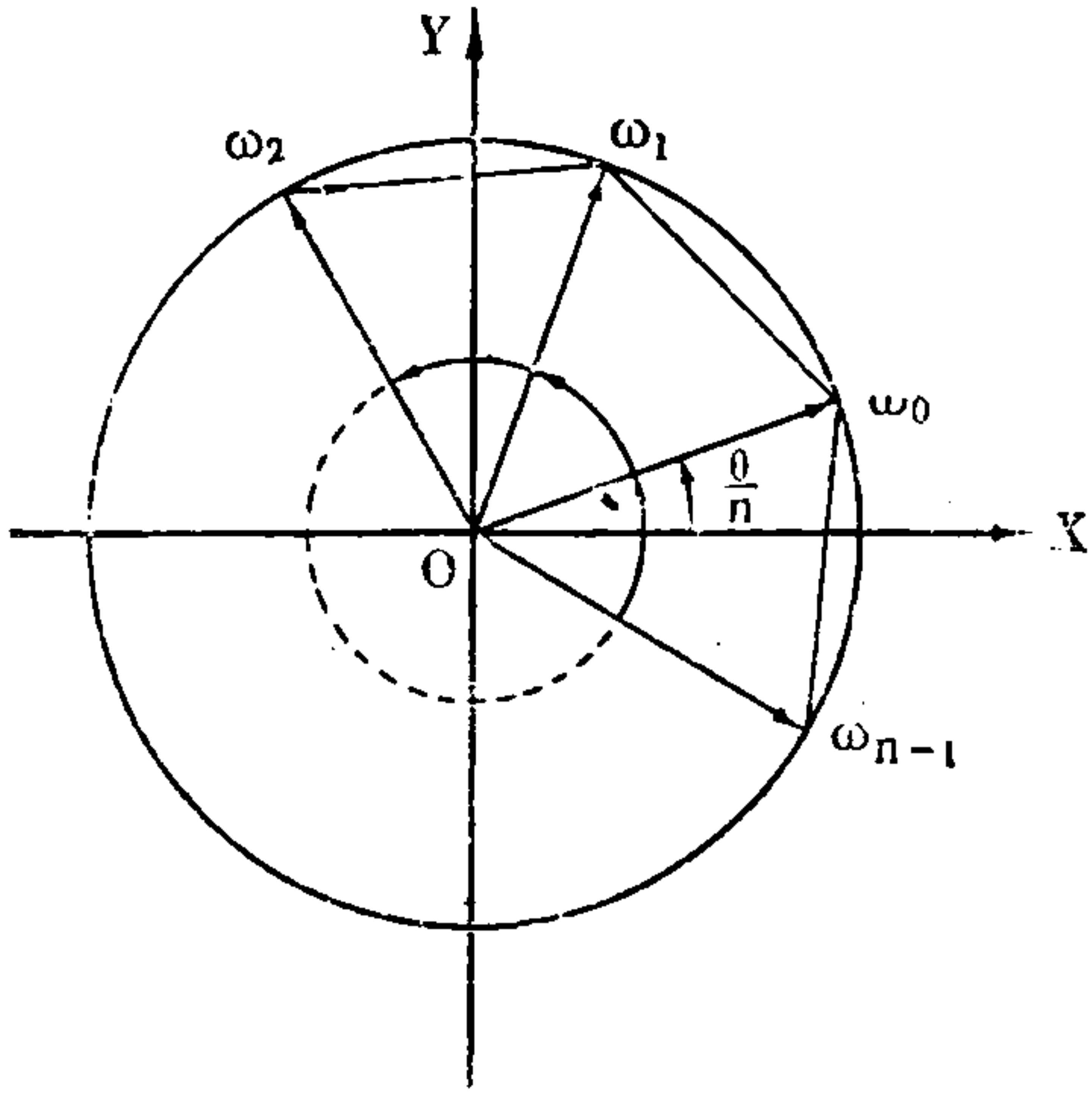


图6

例1 求i的平方根。

解：（1） 将i写成三角形式：

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

（2） $\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$

$$=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2},$$

$k=0,1$。因此，

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

是i的平方根。

例2 求$2-2i$的三次方根。

解：（1） 将$2-2i$写成三角形式：

$$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

（2） $\sqrt[3]{2-2i}=$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}\right),$$

$$(k=0,1,2)$$

即 $$\omega_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$=\frac{(-\sqrt{3}+1)+i(1+\sqrt{3})}{2};$$

$$\omega_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right)=-1-i;$$

$$\omega_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})}{2}.$$

例3 求-1的平方根。

解： $-1=-1+0i=\cos\pi+i\sin\pi$。

$$\sqrt{-1+0i}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}.(k=0,1)$$

即 $\omega_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$；$\omega_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$。

从例3可知，i和$-i$都是-1的平方根，因此$\sqrt{-1}$和i不能混为一谈。

例4 求8的三次方根。

解：8是实数，它在实数系中有一个三次方根2，另外两个根应是虚数。

8的三角形式为

$$8=8+0i=8(\cos 0+i\sin 0).$$

故

$$\sqrt[3]{8+0i}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{2k}{3}\pi+i\sin\frac{2k}{3}\pi\right).(k=0,1,2)$$

$$\omega_0=2(\cos 0+i\sin 0)=2;$$

$$\omega_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-1+\sqrt{3}i;$$

$$\omega_2=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=-1-\sqrt{3}i.$$

注意：例3和例4把实数看成复数，求其在复数系中的各次方根。复数开方仍沿用实数算数根的符号，因此，为了区别两者，约定实数a在复数域中开n次方时，写作$\sqrt[n]{a+0i}$，而不写成$\sqrt[n]{a}$。

例5 解方程

$$(z+1)^m-2^m(z-1)^m=0.\text{（其中}m\text{为自然数）}\quad(9)$$

解：方程(9)可化为

$$(z+1)^m = 2^m (z-1)^m. \qquad (10)$$

显然，$z=1$不是（9）的解（因代入$z=1$时，（9）式不成立）。

用$(z-1)^m$来除(10)式，得

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m = 2^m = 2^m(\cos 0 + i\sin 0). \qquad (11)$$

由(11)，得

$$\frac{z+1}{z-1} = \sqrt[m]{2^m\ (\cos 0 + i\sin 0)}$$

$$= 2\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right) = \omega_k.$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$$

所以，$z+1 = \omega_k(z-1)$。

即　$z = \dfrac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$，$k=0,1,2,\cdots,m-1$是本题的解。

习　题　1.6

1.计算：

（1）$\sqrt[4]{16\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$；　（5）$\sqrt[5]{1}$；

（2）$\sqrt[6]{8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$；　（6）$\sqrt[3]{-1}$；

（3）$\sqrt[5]{4(1+i)}$；　（7）$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$；

（4）$\sqrt[3]{-i}$；　（8）$\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$

2.解方程：

（1）$z^5 - 2 - 3i = 0$；

（2） $(z-1)^5-1024=0$。

3.用复数的几何形式，证明正五边形各对角线长度相等。

4.设z与$\overline{z}$是一对共轭复数。若ω_0，ω_1，…，ω_{n-1}是z的n次方根，则$\overline{z}$的n次方根是$\overline{\omega}_0$，$\overline{\omega}_1$，…，$\overline{\omega}_{n-1}$.证明之。

§1.7 单位根与原根

本节是上节的继续和发展，仍然讨论有关开方的问题，但主要考虑1的n次方根。

一、n次单位根

复数$1=1+0i$的n次方根在复数系中具有特殊的地位。

定义1 复数1的n次方根称为n次单位根。

因为$1=1+0i=\cos 0+i\sin 0$，所以

$$\sqrt[n]{1+0i}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}. \qquad (1)$$

$(k=0, 1, \cdots, n-1)$

因此，n次单位根是

$$\varepsilon_0=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}; \qquad (2)$$

……

$$\varepsilon_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)}{n}\pi+i\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi.$$

从几何上看，n次单位根正好分布在单位圆的圆周上，把圆周分为n等分。

例1 写出3次单位根。

解：由单位根的计算公式(2)，可知

$$\varepsilon_0=1;\ \varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i);$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i).$$

单位根具有许多独特的性质，它在复数系中起着重要的作用。

性质1 n次单位根的乘积和商也是n次单位根。

证明：设ε_k和ε_l是n次单位根，则

$$(\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l)^n=\varepsilon_k^n\cdot\varepsilon_l^n=1\cdot1=1;$$

$$\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_l}\right)^n=\frac{\varepsilon_k^n}{\varepsilon_l^n}=\frac{1}{1}=1.$$

性质2 若ω是复数$z\neq0$的任一n次方根，则$\omega\varepsilon_0,\omega\varepsilon_1,\cdots,\omega\varepsilon_{n-1}$都是$z$的$n$次方根，且是全部$n$次方根。

证明：(1) 先证$\omega\varepsilon_i(i=0,1,\cdots,n-1)$都是$z$的$n$次方根. 这是因为

$$(\omega\cdot\varepsilon_i)^n=\omega^n\cdot\varepsilon_i^n=\omega^n\cdot1=\omega^n=z.$$

(2) 证明$\omega\varepsilon_0$，$\omega\varepsilon_1$，$\cdots\omega\varepsilon_{n-1}$是互不相等的。

事实上，若有$l\neq j$，但$\omega\varepsilon_l=\omega\varepsilon_j$，则因$\omega\neq0$，得$\varepsilon_l=\varepsilon_j$，与$l\neq j$矛盾。

因为z的n次方根是不同的n个数，由(1)、(2)即知：z的n次方根是且仅是$\omega\varepsilon_0$，$\omega\varepsilon_1$，$\cdots$，$\omega\varepsilon_{n-1}$。

性质2对复数开方提供了一个方便的方法。我们只须知

道某复数的一个n次方根，让这个方根分别乘所有n次单位根，便得到该复数的全部n次方根。特别当被开方数是实数时，更显得方便。

例2 求-27的全部三次方根。

解：-27的三次实数根是-3，所以-27的三次方根就是-3分别与三次单位根ε_0，ε_1，ε_2的乘积。即

$$-3\cdot\varepsilon_0=-3;$$

$$-3\cdot\varepsilon_1=(-3)\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}i);$$

$$-3\cdot\varepsilon_2=(-3)\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i);$$

这就是说，-27的全部三次方根是：-3，$\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}i)$，$\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i)$。

例3 求625的全部四次方根。

解：由于$625=5^4$，故5是625的一个4次方根(算术根)。625的全部四次方根是5与4次单位根ε_0，ε_1，ε_2，ε_3的积。即

$$5\cdot\varepsilon_0=5;$$

$$5\cdot\varepsilon_1=5\left(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}\right)=5i;$$

$$5\cdot\varepsilon_2=5\left(\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}\right)=-5;$$

$$5\cdot\varepsilon_3=5\left(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}\right)=-5i,$$

因此，625的四次方根是：5，$5i$，-5，$-5i$。

例4 试求满足以下条件的复数：

$$\overline{z} = z^{n-1}, \ (n \geqslant 3). \tag{3}$$

解：（3）式两端同取模，得

$$|\overline{z}| = |z^{n-1}|. \tag{4}$$

由于$|\overline{z}| = |z|$，$|z^{n-1}| = |z|^{n-1}$，故（4）式化为

$$|z| = |z|^{n-1}, \ 或|z|(|z|^{n-2} - 1) = 0.$$

（1） 若$|z| = 0$，则$z = 0$；

（2） 若$|z|^{n-2} - 1 = 0$，由于$|z|$是一个非负实数，$n \geqslant 3$，故$|z| = 1$。另一方面，（3）式两端同乘以z，则$z\overline{z} = z^n$。但$z\overline{z} = |z|^2 = 1$。故$z^n = 1$，$z$是$n$次单位根。即

$$z = 0或z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \cdot (k = 0, 1, \cdots n-1)$$

将以上z的$n+1$个值代入（3）式验证，显然都能满足。故（3）式的解是0和全部n次单位根。

二、n 次原根

以 6 次单位根为例。

6 次单位根共六个：$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$。其几何意义可见图 7。由本节性质1，任意$\varepsilon_i$的整数幂也是 6 次单位根。现在，我们把$\varepsilon_0$至$\varepsilon_5$的非负整数幂写出来：

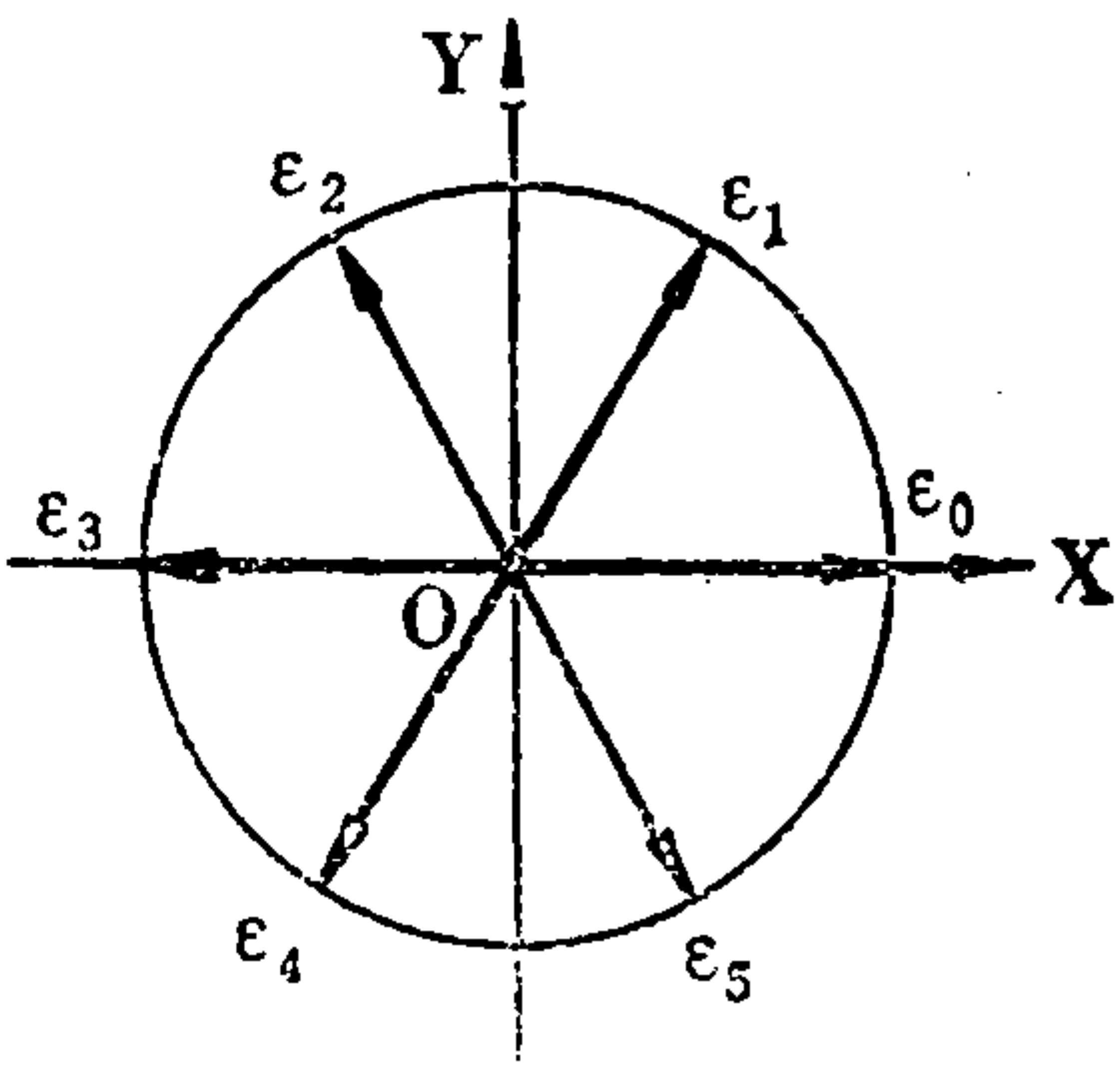


图 7

（1） $\varepsilon_0^0 = \varepsilon_0^1 = \varepsilon_0^2 = \cdots = 1$；

（2） $\varepsilon_1^0 = 1 = \varepsilon_0$，$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_1$，$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$，$\varepsilon_1^3 = \varepsilon_3$，$\varepsilon_1^4 = \varepsilon_4$，

$\varepsilon_1^5=\varepsilon_5$, $\varepsilon_1^6=\varepsilon_0$, $\varepsilon_1^7=\varepsilon_1$, $\cdots$;

(3) $\varepsilon_2^0=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_2^1=\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2=\varepsilon_4$, $\varepsilon_2^3=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_2^4=\varepsilon_2$, $\cdots$;

(4) $\varepsilon_3^0=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_3^1=\varepsilon_3$, $\varepsilon_3^2=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_3^3=\varepsilon_3$, $\cdots$;

(5) $\varepsilon_4^0=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_4^1=\varepsilon_4$, $\varepsilon_4^2=\varepsilon_2$, $\varepsilon_4^3=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_4^4=\varepsilon_4\cdots$;

(6) $\varepsilon_5^0=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_5^1=\varepsilon_5$, $\varepsilon_5^2=\varepsilon_4$, $\varepsilon_5^3=\varepsilon_3$, $\varepsilon_5^4=\varepsilon_2$, $\varepsilon_5^5=\varepsilon_1$, $\varepsilon_5^6=1=\varepsilon_0$, $\varepsilon_5^7=\varepsilon_5$, $\cdots$.

注意：这些乘幂利用乘积的几何意义可以直接看出，不必计算（见图7）.

由上面的结果可见，各个单位根的乘幂数列是一个周期数列。如ε_0的各次乘幂是一个恒等于1的数列，可以看成周期为1的数列；ε_2和ε_4对应的周期是3；ε_3方幂的周期是2。周期是6的有两个：ε_1和ε_5，其0次幂到5次幂，正好是全部6次单位根，这种单位根具有特殊的意义。

定义2　设ε是一个n次单位根，若

$$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}$$

是n个不同的n次单位根(当然也是全部的n次单位根)，则称ε是n次原根。

从此可见，若ε是一个n次原根，那么ε的方幂数列

$$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n, \varepsilon^{n+1}, \cdots$$

是一个周期为n的数列。

在我们刚才举出的例子中，ε_1和ε_5是6次原根；ε_0, ε_2, ε_3, ε_4都不是6次原根，因为它们连续的6个方幂ε^0, ε^1, ε^2, $\cdots$, ε^5不是互异的6个数。

推论1　不论n是什么自然数，

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

总是一个n次原根。

证明：$\varepsilon_1^0=\varepsilon_0$，$\varepsilon_1^1=\varepsilon_1$，$\varepsilon_1^2=\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_1^{n-1}=\varepsilon_{n-1}$是$n$个不同的$n$次单位根，故$\varepsilon_1$是$n$次原根。

证毕。

推论1说明任意次的原根都是存在的。

n次原根具有特殊的意义，因为如果知道一个n次原根，那么只要求出它的0到$n-1$次方幂，就可得出全部n次单位根。

除去ε_1外可能还有别的原根，但是，怎么知道一个n次单位根是n次原根呢？下面定理回答了这个问题。

定理1 设ε_k是一个n次单位根，则ε_k是n次原根的充分必要条件是：ε_k不是任何低于n次的单位根。

分析：本定理的证明分为充分性和必要性两部分。所谓充分性，是由条件推结论，即假定ε_k不是任何低于n次的单位根，求证ε_k是一个n次原根。所谓必要性，是由结论推条件，即假定ε_k是一个n次原根，求证ε_k不是任何低于n次的单位根。

证明：充分性。若ε_k不是任何低于n次的单位根，则ε_k一定是n次原根。因为若不然，必存在0到$n-1$之间的两个整数l和j（不妨设$l<j$）满足$\varepsilon_k^l=\varepsilon_k^j$，即$\varepsilon_k^{j-l}=1$，而$j-l$是一个小于$n$的正整数，说明$\varepsilon_k$是一个低于$n$次的单位根，与条件矛盾。

必要性。设ε_k是一个n次原根，则ε_k一定不是任何低于n次的单位根。因为若不然，则必存在正整数$r<n$，使$\varepsilon_k^r=1$

$=\varepsilon_k^0$，故

$$\varepsilon_k^0,\ \varepsilon_k^1,\ \cdots,\ \varepsilon_k^l,\ \cdots,\ \varepsilon_k^{n-1}$$

不是两两不同的，与ε_k是n次原根矛盾。

证毕。

定理1给出的判断原根的方法仍不简便。因为要判断n次单位根ε_k是否为低于n次的单位根也不容易。下面我们给出一个更简单的判别方法，只须看ε_k的序数k与次数n是不是互素就可以了。

定理2 设ε_k是一个n次单位根，则ε_k是n次原根的充要条件是k与n互素。

证明：充分性。若ε_k不是n次原根，由定理1，ε_k是一个低于n次（设为n_1次）的单位根。由于$\varepsilon_k=\varepsilon_1^k$，故$\varepsilon^{kn_1}=\varepsilon_k^{n_1}=1$。又因$\varepsilon_1$是$n$次原根，故$kn_1$应为$n$的倍数。根据条件，$k$与$n$互素，因此$n_1$应是$n$的倍数，与$0<n_1<n$矛盾。所以$\varepsilon_k$是$n$次原根。

必要性。若k与n不互素，则存在整数$n>1$，能够整除k与n。设$n=n_1d, k=k_1d$，所以$\varepsilon_k^{n_1}=(\varepsilon_1^k)^{n_1}=\varepsilon_1^{n_1dk_1}=(\varepsilon_1^n)^{k_1}=1^{k_1}=1$。也就是说，$\varepsilon_k$是一个低于$n$次的单位根，根据定理1，$\varepsilon_k$不是$n$次原根。

证毕。

这样，我们把判断原根的问题转化为判断整数互素的问题。当n为素数时，有

推论 2 若p是素数（素数的定义见附录），则除$\varepsilon_0=1$外，其他p次单位根（$p-1$个）都是p次原根。

证明：由于p是素数，p和小于p的正整数都互素，由定理2，ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_{p-1}都是p次原根。

如5次原根有4个，7 次原根有 6 个，23 次原根有22个，等等。

例5 求证n次（$n>1$）单位根之和为零。

分析：n次单位根为1，ε_1，ε_2，…，ε_{n-1}。由推论1，ε_1是原根，故这n个单位根也可写成1，ε_1，ε_1^2，…，ε_1^{n-1}。共和

$$S=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\div\varepsilon_1^{n-2}$$

是一个等比级数。

证明：

$$\begin{aligned}S&=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}\\&=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}\\&=\frac{1-\varepsilon_1^n}{1-\varepsilon_1}=\frac{1-1}{1-\varepsilon_1}=0.\end{aligned}$$

例6 若$n=2^s$（s为正整数），则n次原根有2^{s-1}个。

分析：由定理 2 知，只须求出与2^s互素且小于2^s的正整数的个数即可。

证明：小于2^s且与2^s互素的是且仅是小于2^s的正奇数，它们共有$\frac{1}{2}2^s=2^{s-1}$个。所以，$n=2^s$次原根共有2^{s-1}个。

习 题 1.7

1.(1) 写出全部 5 次单位根；

(2) 用性质 2 计算$\sqrt[5]{32+0i}$。

2.证明：n次单位根的乘方和倒数也是n次单位根。

3.证明：n次单位根的共轭复数也是n次单位根。

4.设m是n的整数倍，求证n次单位根也是m次单位根。

5. 设m为正整数，解方程：

(1)　$(z+1)^m-(z-1)^m=0$；

(2)　$(z+i)^m-(z-i)^m=0$。

5. 找出2次、4次、10次、12次、13次单位根中的所有同次原根。

7. 证明：若ε是n次原根，则$\overline{\varepsilon}$也是n次原根。

8. 证明：n次原根的个数为偶数，这里$n>2$。

9. 证明：n次原根的总和及总积都是实数。

10. 求和：

$$S=1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots\varepsilon^{n-1}.$$

其中ε是一个$2n$次原根。

11. 已知ω是复数z的一个n次方根，ε是一个n次原根。试由ω和ε表示z的所有n次方根。

§1.8　复数系的讨论

一、复数系的无序性

如上所述，复数系是实数系的扩张。在复数系中解决了实数系里未能解决的开方问题，每个复数都可以开n次方，而且各方根用统一的形式表达出来。

但是，实数系固有的性质并不是全部都能推广到复数系。如实数系R中具有以下"序"的性质：

(1)　对于R中任何两个数a与b，$a<b$，$b<a$，$a=b$三者有且仅有一种关系成立；

(2)　若$a<b$，$b<c$，则$a<c$；

(3) 若$a<b$，则$a+c<b+c$；

(4) 若$a<b$，$0<c$，则$ac<bc$。

而对于复数系C，就不能规定序的关系，如果硬性地规定了某种序的关系，就会导致矛盾。

比方说，如果我们现在在C中定义一个序的关系"<"，那么任意两个不等的复数之间，一定有"<"关系。特别对于0和i也一定有"<"关系：或者$0<i$，或者$i<0$。下面，我们来证明这两种规定都行不通。

如果规定$0<i$，这时，由(4)，取$b=c=i$，$a=0$，得$i\cdot 0<i^2=-1$，即$0<-1$。再取$c=-1$，$a=0$，$b=-1$，由(4)得$0\cdot(-1)<(-1)^2=1$，即$0<1$。但因$0<-1$，根据(3)，取$a=0$，$b=-1$，$c=1$，得$0+1<-1+1=0$，即$1<0$。这样，$1<0$与$0<1$同时成立，与(1)矛盾。

如果规定$i<0$，这时，由(3)，取$a=i$，$b=0$，$c=-i$，则$i+(-i)<0+(-i)$，或$0<-i$。再由(4)，取$a=0$，$b=-i$，$c=-i$，得$0\cdot(-i)<(-i)^2=-1$，亦即$0<-1$。但由(4)，取$a=i$，$b=0$，$c=-1$，得$i\cdot(-1)<0\cdot(-1)$，$-i<0$。由于刚才已推得$0<-i$，于是，0和$-i$之间就存在着两个关系：$-i<0$与$0<-i$。与(1)矛盾。

总之，复数系不象实数系，不能建立满足上面四个性质的序的关系。

这是复数系和实数系一个本质的区别。

二、关于模的不等式

由于复数的模是实数，所以复数的模还是可以比较大小的。有关复数模的不等式（不是复数的不等式），最主要的

是三角不等式。

性质1 对于任意两个复数z_1和z_2，下面的不等式成立：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1}$$

即和的模不小于模的和。

证明：设$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$,

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

再设 $z_1+z_2=R(\cos\psi+i\sin\psi)$.

所以

$$\begin{cases} r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2=R\cos\psi, & (2)\\ r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2=R\sin\psi. & (3)\end{cases}$$

（2）$\times\cos\psi+$（3）$\times\sin\psi$，得

$$r_1(\cos\varphi_1\cos\psi+\sin\varphi_1\sin\psi)+r_2(\cos\varphi_2\cos\psi+\sin\varphi_2\cdot\sin\psi)=R(\cos^2\psi+\sin^2\psi).$$

因此 $r_1\cos(\varphi_1-\psi)+r_2\cos(\varphi_2-\psi)=R$.

由于 $r_1+r_2\geqslant r_1\cos(\varphi_1-\psi)+r_2\cos(\varphi_2-\psi)$，故

$$r_1+r_2\geqslant R.$$

即 $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$.

性质2 对于任意两个复数z_1和z_2，有

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|. \tag{4}$$

即和的模不小于模的差。

证明：由于$z_1=(z_1+z_2)+(-z_2)$，根据性质1，

$|z_1|\leqslant|z_1+z_2|+|-z_2|=|z_1+z_2|+|z_2|$,

因而，$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|$.

这两个不等式，有着明显的几何意义（见图2）。

$\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，$\overrightarrow{OM}$分别代表z_1，z_2，z_1+z_2。三个复数的模

就是$\triangle OM_1M$的三个边长。性质1和性质2在几何上说明三角形两个边长之和大于或等于第三边长，两个边长之差小于或等于第三边长。这里也包含了“退化”的情形，即三角形化为直线段的情形，这时（1）和（4）以等式成立。

例1 若$|z|<1$，求证$|(1-i)z+iz|<\frac{5}{2}$。

证明： 由本节性质1和模与乘积的关系可知

$$\begin{aligned}|(1-i)z+iz| &\leqslant |(1-i)z|+|iz| \\ &=|1-i||z|+|i||z|=\sqrt{2}|z|+|z| \\ &=(\sqrt{2}+1)|z|<\sqrt{2}+1<\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

（这里应用了$|1-i|=\sqrt{2}$，$|i|=1$）

三、关于算术根

在初等代数里，我们知道，对于任意的非负实数a和自然数n，总有唯一的实数b,满足：（1） $b\geqslant 0$，（2） $b^n=a$，则称b为a的n次算术根，记为$b=\sqrt[n]{a}$（与复数a的开n次方不同）。

对于算术根，有许多大家熟知的运算公式，如：

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

这些公式绝不能照搬到复数系里来。

在复数系里开方是一种多值运算，因为任何非零复数开n次方，会得到n个不同的方根，我们不能规定哪一个是它的算术根。有些初学者习惯于实数中根式的推演，往往把算术根的性质与运算形式地搬来照用，这样会出现荒唐的结

果。如

$$-1=i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{1}=1.$$

于是得到一个矛盾的结果：$-1=1$。

问题首先出在$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}$上。这里错误地运用了$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$的算术根性质，忘记了那个公式是算术根才具有的性质。另外，$i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$也有毛病，因为$\sqrt{-1}$作为复数的开方应有两个复根$\pm i$，所以$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\pm i^2=\mp 1$，结果是多值的。最后，等式$\sqrt{1}=1$又把它看成求算术根了.实际上,复数1的平方根是$\pm 1$。

同理，下面的推导也不正确：

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1},\quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},\quad \frac{1}{i}=\frac{i}{1},\quad i^2=1.$$

读者想一想，错在哪里？

习 题 1.8

1.求满足下式的z的几何意义：

(1) $|z|\leqslant 2$；

(2) $1<|z|<3$；

(3) $0<|z-3|\leqslant 2$；

(4) $|z+2-i|=1$；

(5) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$.

2.设$|z_1|\leqslant\frac{1}{2}$，$|z_2|\leqslant\sqrt{2}$，求证：

$$\left|\frac{2z_1+(3i+4)z_2^2}{3+4i}\right|\leqslant 2.2.$$

3. 本节性质 1 和 2 中等号何时成立？

4. 指出下列推导中的错误：

（1） $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$，$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$，$\frac{1}{i}=\frac{i}{1}$，$i^2=1$；

（2） $i=\sqrt{-1}=\sqrt{-1\cdot 1}=\sqrt{(-1)(-1)(-1)}$
$=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i^3=-i$。

§1.9 数环与数域

我们先后讨论过自然数系、整数系、有理数系、实数系和复数系，这些数系各有其自身的特点，但就其与加、减、乘、除的关系来看，不外三种情况：

(1) 如自然数系，它只对加法、乘法运算封闭，对减法和除法不封闭。

(2) 如整数系，它对加法、减法、乘法都是封闭的，但对除法不封闭。就是说，两个整数的和、差、积还是整数，但商不一定是整数。如$3\div 5=\frac{3}{5}$就不是整数。

(3) 如有理数系、实数系、复数系，它们对加、减、乘、除四种运算都是封闭的（除法要求除数不是零）。

定义1 若一个数系A至少包含一个数，且A关于加法、减法和乘法封闭，则称A为数环。

定义2 若一个数系P至少包含两个不同的数，且P关于加法、减法、乘法和除法（除数不等于零）封闭，则称P为数域。

显然，整数系是数环，不是数域。有理数系、实数系和

复数系都是数环，也是数域。当然，数域都是数环。自然数系不是数环，所以也不是数域。

但数环与数域并非仅限于以上几种。

下面我们引用集合论的记号。设M是一个数集，x是M中的一个数，那么就记作$x\in M$，读作"x属于M"。若x不是M中的数，则记作$x\bar{\in} M$，读作"x不属于M"。[注]

例1 全体偶数组成数环，但不是数域。

证明： 由于偶数的和、差、积仍是偶数，而且，显然偶数集至少包含一个数2（实际上有无穷多个数），所以这一数集组成数环。但它对除法不封闭，如$6\div 2=3$就不是偶数，所以它不是数域。

一般地，任一整数的所有倍数都构成数环。

注意： 要证明一个数集是数环或数域，需要根据数环或数域的定义，验证它关于相应运算的封闭性。但当证明一个数集不是数环或数域时，只须举一个具体的反例，推翻数环或数域某一项条件就够了。

例2 全体奇数不能构成数环。

证明： 1和3是奇数，但$1-3=-2$不是奇数。所以全体奇数不作成数环。

注意： 由于要证全体奇数不是数环，就不必提及它符合数环条件的方面，如关于乘法封闭等。这一点初学者往往不习惯。

例3 求证：由全体形如$a+b\sqrt{2}$（其中a，b为任意有理数）的数组成的数集P是数域。

证明： 首先，P中至少有两个不同的数：

注 关于数集及有关记号可参见本丛书《数学分析基础》。

$$1=1+0\sqrt{2}\text{和}0=0+0\sqrt{2}.$$

其次，P关于加、减、乘、除运算封闭。

任取$x_1\in P$，$x_2\in P$，设$x_1=a_1+b_1\sqrt{2}$，$x_2=a_2+b_2\sqrt{2}$。则

$$x_1\pm x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2};$$
$$x\cdot x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}.$$

设$x_2\neq 0$，则

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{(a_1a_2-2b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{2}}{a_2^2-2b_2^2}$$
$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\cdot\sqrt{2}.$$

由于$a_1\pm a_2$，$b_1\pm b_2$，$a_1a_2+2b_1b_2$，$a_1b_2+b_1a_2$，$\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$，$\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$都是有理数，故$x_1\pm x_2\in P$，$x_1\cdot x_2\in P$，$\frac{x_1}{x_2}\in P$。因而$P$是一个数域。

若把例3中的$\sqrt{2}$换为$\sqrt{m}$（其中m是一个非完全平方数），结论仍然成立（证法与例3相同）。因为这样的m有无穷多个，所以数域可以找到无限多个（当然数域并非尽是这种形式）。

以下讨论数环数域的一些简单性质：

引理1 任何数环都含有数零。

证明：任何数环至少含一个数，设为a，由于数环对于

减法封闭，所以也含有$a-a=0$。

引理2 任何数域都含有数0和1。

证明：任何数域至少含有两个不同的数，所以至少有一个非零数，设为a。因而$\frac{a}{a}=1$也属于这个数域。而数域也是数环，所以也包含0。

数0本身组成的集合，记为$\{0\}$。由于0与0的和、差、积还是0，所以$\{0\}$是数环。$\{0\}$称为零数环，它是唯一只含一个数的数环，也是唯一只含有限个数的数环。这就是下面的定理：

定理1 任一数环A若含有非零数，则A必含有无穷多个数。

证明：设$a\in A$，$a\neq 0$，因而$2a=a+a\in A$，但显然$2a\neq a$，同理a，$2a$，$3a$，……，na，……都是A中的数，并且互不相同，所以A中含有无穷多个数。

证毕。

定理1告诉我们，一个数环要么只含一个数零，要么含有无限多个数，不会含有两个、三个等有限多个数。

定理2 任何数域P都包含有理数域Q。

证明：根据引理2，0，$1\in P$，因为P关于加、减法封闭，故自然数$n=1+1+\cdots\cdots+1\in P$，$0-n\in P$，即$-n\in P$，因而全体整数属于$P$。

其次，因为P关于除法封闭，故$\frac{n}{m}\in P$，其中m、n是整数，$m\neq 0$。这就是说，全体有理数都包含在P中。

证毕。

定理2说明最小的数域是有理数域，此外再没有更小的

数域了。

根据定义2，要证一个数集是数域，须要证明它对四则运算封闭。下面，我们指出，实际上只要验证它对于减法和除法两种运算封闭就够了。

定理3 若数集P至少含有两个数，且关于减法和除法封闭，则P是数域。

分析： 将加法和乘法归为减法和除法。

证明： 因为P中至少有一个非零数，设为a。由于P关于减法和除法封闭，所以，$0=a-a\in P$，$1=\dfrac{a}{a}\in P$，即P中含有0和1。

现在任取$x\in P$，$y\in P$，只须证明$x+y\in P$，$x\cdot y\in P$。

事实上，由减法的封闭性，$-y=0-y\in P$，因而$x+y=x-(-y)\in P$。

若$y=0$，则显然$x\cdot y=x\cdot 0=0\in P$；

若$y\neq 0$，则由于$1\in P$，$y\in P$，得$\dfrac{1}{y}\in P$。又根据同样的理由，$x\cdot y=\dfrac{x}{\dfrac{1}{y}}\in P$。

这样就推得P关于加法和乘法也封闭，因而是数域。

证毕。

例4 证明一切形如$a+b\sqrt{3}i$的复数（其中a、b为任意有理数）组成数域。

分析： 利用定理3，只证它关于减法和除法封闭，并至少含两个不同的数。

证明： 将上述数集用P表示。

(1) 显然，P 至少包含两个数。

(2) 设$x_1=a_1+b_1\sqrt{3}i$，$x_2=a_2+b_2\sqrt{3}i$是P中任意两个数，则

$$x_1-x_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{3}i\in P.$$

设$x_2\neq 0$，那末

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a_1+b_1\sqrt{3}\,i}{a_2+b_2\sqrt{3}\,i}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{3}\,i)(a_2-b_2\sqrt{3}\,i)}{(a_2+b_2\sqrt{3}\,i)(a_2-b_2\sqrt{3}\,i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+3b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{3}\,i}{a_2^2+3b_2^2}$$

$$=\frac{a_1a_2+3b_1b_2}{a_2^2+3b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+3b_2^2}\sqrt{3}\,i\in P.$$

所以P是数域。

习 题 1.9

1.(1) 证明全体纯虚数不能构成数环；

(2) 证明全体模大于1的复数不能构成数环；

(3) 证明全体模小于1的复数不能构成数环。

2.判断：一切形如$a\sqrt{2}$(a为任意整数)的数能否构成数环。

3.证明：一切形如$\frac{a}{2^n}$的分数构成数环，但非数域。其中n、a为整数，$n\geqslant 0$。

4.设P_1和P_2都是数域，则P_1和P_2的公共部分$P_1\cap P_2$也是数域。

5.证明：形如$a+bi$（a、b为任意有理数）的全体复数（注意：不是整个复数系）组成数域（称为高斯数域）。

6.包含$\sqrt{2}$的最小数环和数域是什么？

7.包含i的最小数环和数域是什么？

注意：包含数a的最小数环或数域是指这样的数集A，A是一个数环或数域，a属于A，而且若B是含有a的数环或数域，那末B一定包含A。

8.若A是一个含有非零数的数环，证明一定在A中可找到一个真子集A_1，构成数环。

本章提要

1.复数表示法

（1）代数形式：$z=a+bi$，其中a，b分别是z的实部和虚部系数．

（2）三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r$是$z$的模，$\theta$是$z$的幅角．

（3）几何形式：点M（a，b）或向量$\overrightarrow{OM}$．

*（4）指数形式：$z=re^{i\theta}$．

2.复数的四则运算

（1）加法：

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

（2）减法：

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

（3）乘法：

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;$$

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

（4）除法：（除数$\neq 0$）

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2};$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

3.复数的乘方与开方

(1) 乘方:

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

(2) 开方:

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{\pi}\right).$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

4.n次单位根

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

5.n次原根

(1) 定义:若n次单位根ε_k的方幂$\varepsilon_k^0,\varepsilon_k^1,\cdots,\varepsilon_k^{n-1}$是不同的$n$个数,则称$\varepsilon_k$为$n$次原根.

(2) 判别法:

① ε_k是n次单位根,则ε_k为n次原根的充要条件是:ε_k不是任何低于n次的单位根.

② ε_k是n次单位根,则ε_k为n次原根的充要条件是:k与n互素.

6.数环与数域

(1) 数环:关于加、减、乘封闭且至少含一个数的数集.

(2) 数域:关于加、减、乘、除封闭且至少含两个不同数的数集.

复习题一

1.计算:

(1) $(\sqrt{7}-\sqrt{5}i)\ (-2\sqrt{5}+4\sqrt{7}i)$;

(2) $\frac{(2+3i)(5-7i)}{(3-2i)(-4+i)}$;

(3) $(a+bi)^3+(a-bi)^3$;

(4) $(1+i)^{25}$;

(5) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{30}$;

(6) $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$;

(7) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$;

(8) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}$;

(9) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$;

(10) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$.

2.证明:

$(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)\ (a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)=a^3+b^3+c^3-3abc$,

其中a, b, c为实数, ε是$x^2+x+1=0$的根.

3.化简:

(1) $(1+\varepsilon)^n$; (2) $1+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}+\cdots+\frac{1}{\varepsilon^{3n-1}}$.

其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

4.求下列方程或方程组的复数解:

(1) $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=2+6i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=5+4i;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=0,\\(2i+3)z_1+(2i-1)z_2=-3+5i;\end{cases}$

(3) $z^2-(1+3i)-2+2i=0$;

(4) $z^2-(i+2)z+3-i=0$;

(5) $z^3=\overline{z}$;

(6) $|z|-z=10+2i$.

5.证明：若$z_n=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$，

则当n为3的倍数时，$z_n=2$；当n不是3的倍数时，$z_n=-1$.

6.满足下列条件的复数z的几何意义是什么：

(1) $|z-(1+i)|<2$且$|z-i|>2$；

(2) $z=\dfrac{1+it}{1-it}$，t为任意实数.

7.求满足下式的最小正整数：

$$\frac{(1+i)^{2n}}{1-i}+\frac{(1-i)^{2n}}{1+i}=2^n.$$

8.设$z_0=1+i$，B是由一切形如kz_0(k为实数)的复数组成的数集. 试问B是不是数环？并说明B的几何意义.

9.全体形如$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}i$的复数组成的数集(其中a,b,n是任意整数，$n\neq0$)是不是数环？是不是数域？

10.全体形如$a+b\varepsilon$的复数组成的数集(其中a，b是整数，ε是一个3次原根）是否构成数环？

11.写出包含2的最小数环，并证明之.

12.写出包含2的最小数域，并证明之.

13.若数集A至少含一个数，并且A关于减法和乘法封闭，求证A是数环.

第二章　一元多项式

本章除讲述一元多项式的一般概念外，着重介绍多项式的整除性质、带余除法、综合除法及按某一多项式的方幂展开等方法。

§2.1　一元多项式的概念

一、什么是一元多项式

以下的讨论均假定是在某一数域P上，而不具体指定是哪个数域，其结论具有一般性。

定义1　由变量x和数域P上的数，经有限次加、减、乘运算得到的函数表达式，称为数域P上变量x的多项式，或一元多项式。

注意：数域P上的多项式作为函数的定义域也认为是数域P。

如x^2+2x+3，$(x-1)^2+(x+2)(2x-3)$，5等都是有理数域上的多项式，也可看作任意数域上的多项式。一般地，若$\overline{P}$是包含数域P的任一数域，那末，数域P上的多项式当然也是数域$\overline{P}$上的多项式。反之不然，如$\sqrt{2}x^3+\pi x^2-\sin 10°$，$\left(\sqrt{\pi}x+\sqrt{17}\right)^2+2.752$是实数域上的多项式，但不是有

理数域上的多项式；而 $ix^3+\sqrt{3}x-i$，$(2-ix)^2$等则是复数域上的多项式，却不是实数域或有理数域上的多项式。

下面的函数表达式不是多项式：

$$\frac{2}{x+3},\ \frac{x-1}{x}+x^2-1;\quad \text{（分母含有自变量}x\text{）}$$

$$2x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}+1,\ x^2-\sqrt{x}+1$$

（含变量的分数指数方幂）

$$2-e^x,\ \lg x+1,\ \sin x-tg(x^2-2)+1;$$

（含变量的超越函数）

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

（含无限项，是幂级数，不是多项式）

一元多项式经恒等变形，可化为以下形式：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, \tag{1}$$

其中a_n，a_{n-1}，…，a_0是数域P中的数，即表示成有限个形如a_ix^i的和。形式（1）称为多项式的标准形式。每个乘积a_ix^i叫做多项式(1)的一项，并称为i次项，a_i称为i次项系数。（1）中各项的次数互不相同，而且逐项递减，故称为多项式的降幂标准形式，或者简称降幂形式。

多项式(1)有时也写成以下形式：

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,$$

称为多项式的升幂形式。

本书为统一起见，除个别情况外，一律写成降幂形式。以下所说的多项式均指写成标准形式的多项式。

在(1)中，若$a_n\neq0$，则称a_nx^n为这个多项式的首项，a_n称为首项系数，n称为多项式的次数。若除$a_0\neq0$外，其他a_i

都是零，则称之为零次多项式。此外，

$$0x^n+0x^{n-1}+\cdots+0$$

也是多项式，称为零多项式，记为$0(x)$。$0(x)$认为没有次数，是唯一没有次数的多项式。

二、相等与恒等

两个降幂形式下的多项式$f(x)$和$g(x)$，若有相同的形式，即次数相等及对应系数相同（不计零系数项），则称为相等，记为$f(x)=g(x)$。

那末，多项式的相等与作为函数的恒等是否一致呢？回答是肯定的。为此需要证明$0(x)$的相应性质。首先，显然$0(x)$对数域P中任意数的函数值都是零，$0(x)\equiv 0$。另一方面，如果一个标准形式下的多项式，对于数域P中任意数的函数值都是零，那末这个多项式一定是$0(x)$。这就是下面的

定理 1 若数域P上的多项式$f(x)$恒等于零，则$f(x)$是$0(x)$。

证明：对多项式(1)的次数n用数学归纳法。

(1) 证定理对于$n=1$成立。

设$f(x)$形如a_1x+a_0。若对于x的任意值，$f(x)\equiv 0$，令$x=0$，则$0=f(0)=a_0$，故$a_0=0$；再令$x=1$，$0=f(1)=a_1\cdot 1+0=a_1$，即$a_1=0$，故$f(x)=0(x)$。定理对于$n=1$的情况成立。

(2) 假定定理对于$n=m-1$成立，推证对于$n=m$成立。

设$f(x)$形如

$$a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0. \qquad (2)$$

由于$f(x)\equiv 0$，用$2x$代x，得

$$f(2x)\equiv a_m(2x)^m+a_{m-1}(2x)^{m-1}+\cdots+a_0$$

$$\equiv 2^m a_m x^m+2^{m-1}a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+2a_1x+a_0. \quad (3)$$

由(2)式，又可得

$$2^m f(x)\equiv 2^m a_m x^m+2^m a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+2^m a_1 x+2^m a_0. \quad (4)$$

由于$f(x)\equiv 0$，故$f(2x)\equiv 0$，$2^m f(x)\equiv 0$，

(4)式－(3)式，得

$$2^{m-1}\ (2-1)\ a_{m-1}x^{m-1}+2^{m-2}\ (2^2-1)\ a_{m-2}x^{m-2}+\cdots$$

$$+(2^m-1)a_0\equiv 0.$$

上式左边是一个$n=m-1$情形的多项式，它恒等于零。由归纳假定，必须其所有系数都是零：

$$2^{m-1}\ (2-1)\ a_{m-1}=0,\ 2^{m-2}\ (2^2-1)\ a_{m-2}=0,\ \cdots,$$

$$(2^m-1)a_0=0.$$

于是，$a_{m-1}=a_{m-2}=\cdots=a_0=0$。多项式$f(x)\equiv 0$，化为$a_m x^m\equiv 0$。令$x=1$，又得$a_m=0$。

证毕。

定理1也称为零多项式的唯一性定理。有了这个定理就可得出多项式的唯一性定理：

定理2　数域P上非零多项式

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0)$$

$$g(x)=b_m x^m+x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0 \qquad (b_m\neq 0)$$

恒等的充要条件是$f(x)=g(x)$。

注意：$f(x)\equiv g(x)$是指对于任意的$x\in P$，都有$f(x)$数$g(x)$；而$f(x)=g(x)$是指：(1) $m=n$，(2) 对应系数相等。

证明：充分性。即由$f(x)=g(x)$推出$f(x)\equiv g(x)$。

设$f(x)=g(x)$，即$m=n$，且对应系数相等，那末$f(x)$

和$g(x)$是同一个多项式，当然是恒等的。

必要性。即由$f(x)\equiv g(x)$推出$f(x)=g(x)$。

若次数不等，设$n>m$，让$f(x)$减去$g(x)$，得

$$a_nx^n+\cdots+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m-b_m)x^m+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)\equiv 0。$$

等式左边是x的多项式，由于它恒等于零，根据本节定理1，$a_n=0$，与已知矛盾。故$f(x)$与$g(x)$次数相等：$m=n$。所以

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0。$$

$$0\equiv f(x)-g(x)\equiv(a_m-b_m)x^m+(a_{m-1}-b_{m-1})x^{m-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)。$$

由本节定理1，

$$a_m-b_m=0，\ a_{m-1}-b_{m-1}=0，\ \cdots，\ a_0-b_0=0。$$

或 $a_m=b_m，\ a_{m-1}=b_{m-1}，\ \cdots，\ a_1=b_1，\ a_0=b_0。$

所以 $f(x)=g(x)$。

证毕。

三、待定系数法

有了定理2，我们可以把多项式的恒等与相等看成一个概念。定理2是多项式代数中一个重要方法——待定系数法的理论根据。所谓待定系数法，是假定一个多项式的等式成立，某些未知的系数先形式地写出来，再根据自变量的某些特定数值或系数之间的关系，列出以待定系数为未知量的方程组，解这些方程组，就可以得到所求的系数。

例1 已知三次多项式$f(x)$在$x=-1，0，1，2$时函数值分别为1，2，3，2，试写出这个多项式。

解：设这个多项式的降幂形式为

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$。

因而 $1=f(-1)=-a+b-c+d$，

$2=f(0)=d$，

$3=f(1)=a+b+c+d$，

$2=f(2)=8a+4b+2c+d$。

得以a，b，c，d为未知量的方程组

$$\begin{cases} -a+b-c+d=1 & ① \\ d=2 & ② \\ a+b+c+d=3 & ③ \\ 8a+4b+2c+d=2 & ④ \end{cases}$$

由②，$d=2$；①+③得$2b+2d=4$，$b+d=2$，故$b=0$；由③$a+c=3-2=1$。再由④，$8a+2c=0$，或 $4a+c=0$。

因而 $a=-\frac{1}{3}$，$c=\frac{4}{3}$。

故所求的多项式是

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x+2。$$

例2 若多项式

$f(x)=(3a+c+3)x^2+(a+b+c)x+c$

与$g(x)=(b+d)x^3+(d+1)x+2a$

相等，求a、b、c、d，并把多项式写出来。

解：比较二多项式同次项的系数，得

x^3： $0=b+d$，

x^2： $3a+c+3=0$，

x:　　$a+b+c=d+1$,

1：　　　　$c=2a$.

这是关于a，b，c，d的一个四元一次方程组，可解得

$$a=-\frac{3}{5},\ b=\frac{7}{5},\ c=-\frac{6}{5},\ d=-\frac{7}{5}.$$

于是$f(x)=g(x)=0x^3+0x^2-\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}=-\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}$.

*四、关于多项式的值域

多项式既然是数域上的函数，所以有必要讨论这种函数值域的情况，即当自变量取遍整个数域P时，其函数值集合的情况。

我们知道，数域关于四则运算是封闭的。因此，P上多项式函数的值域总包含在数域P之中，亦即对于任何$a\in P$，恒有$f(a)\in P$。

但是，$f(x)$的值域是否能“充满”整个数域P呢？一般是不行的，例如$0(x)$以及零次多项式的值域只含一个数。

对于一般的数域来说，高于零次的多项式函数的值域也不一定充满整个数域。如实数域上的多项式$f(x)=x^2$的值域，只是全部非负实数集R^+，并非整个实数域R。

但复数域C就不同了，对于C上的任意高于零次的多项式$f(x)$和任意$b\in C$，方程

$$f(x)=b\text{或}f(x)-b=0$$

在C中总有解（详见§5.1），就是说，复数域上任意高于零次的多项式，作为函数的值域总重合于整个复数域C。这是复数域上多项式的一个特性。

习　题　2.1

1. 若多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 当 $x=1$、2、3时，分别为2、4、6，试写出这个多项式。

2. 若多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 在 $x=0$、1时，分别为2、4，试写出这个多项式。

3. 多项式

$$f(x)=ax^3+(b+ci)x^2+(a+di)x+d$$

与 $$g(x)=(b+c)x^3+ax^2+(a+2i)x+b-c,$$

当实数a、b、c、d为何值时相等？

4. 多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 在 $x=0$、1、2时的函数值是同一个数，试写出这个多项式。

§2.2　多项式环

本节介绍多项式的运算及其性质，并引进多项式环的概念。

一、多项式运算与多项式环

设有数域P上的两个多项式：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0.$$

不妨假定$n\geqslant m$。

$f(x)$与$g(x)$的和$f(x)+g(x)$是指多项式

$$s(x)=a_nx^n+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_0+b_0). \quad (1)$$

即$s(x)$的系数是$f(x)$与$g(x)$对应系数的和。

而差$f(x)-g(x)$是指多项式

$$h(x)=a_nx^n+\cdots+(a_m-b_m)x^m+\cdots+(a_0-b_0)。\qquad (2)$$

即$h(x)$的系数是$f(x)$与$g(x)$对应系数的差。

$f(x)$与$g(x)$的积$f(x)g(x)$是指多项式

$$k(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots$$
$$+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0。\qquad (3)$$

显然，$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$的系数仍属于数域P，因而它们都是数域P上的多项式。

记数域P上的全体一元多项式组成的集合为P〔x〕。于是，得出：

定理1 P〔x〕关于加法、减法及乘法封闭。

我们记得，数环关于数的加法、减法及乘法封闭，这里也把P〔x〕称做数域P上的一元多项式环。

若$f(x)$是数域P上的多项式，则记作$f(x)\in$ P〔x〕。

多项式的运算与多项式的次数之间有什么关系呢？

定理2 设$f(x)$与$g(x)$是非零多项式，那末，

(1) 若$f(x)\pm g(x)$不是0(x)，则其次数不高于$f(x)$和$g(x)$中次数较高者；

(2) $f(x)g(x)$的次数等于$f(x)$与$g(x)$次数之和。

注意：$f(x)\pm g(x)$可以是0(x)，这时$f(x)=\mp g(x)$。若$f(x)$与$g(x)$的次数不同，则$f(x)\pm g(x)$的次数等于$f(x)$与$g(x)$中次数较高者；若$f(x)$与$g(x)$的次数相同，则$f(x)\pm g(x)$的次数可以与$f(x)$的次数(即$g(x)$次数)相同，也可以低于$f(x)$的次数。

定理2的证明，从(1)、(2)、(3)式可直接推得。请读者自行完成。

推论1 若$f(x)\neq 0(x)$，$g(x)\neq 0(x)$，则

$$f(x)g(x)\neq 0(x)。$$

证明：设$f(x)$和$g(x)$分别是n次和m次多项式，由本节定理2，积$f(x)g(x)$的次数为$m+n$，故不是$0(x)$。

二、多项式运算的性质

下面讨论多项式加法及乘法的性质。

定理3 多项式的运算满足通常的算律．也就是说，任取$f(x)$、$g(x)$、$h(x)\in P[x]$，则以下等式成立：

(1) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

(2) $[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$；

(3) $f(x)g(x)=g(x)f(x)$；

(4) $[f(x)g(x)]h(x)=f(x)[g(x)h(x)]$；

(5) $[f(x)+g(x)]h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$；

(6) 消去律成立，即若$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，$f(x)\neq 0(x)$，那末$g(x)=h(x)$。

证明：(1) 至(5)可根据加法与乘法法则加以验证．下面证明(6)：

由于$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，故$f(x)[g(x)-h(x)]=0(x)$。若$g(x)\neq h(x)$，则$g(x)-h(x)\neq 0(x)$．又因$f(x)\neq 0(x)$，根据本节推论，应有$f(x)[g(x)-h(x)]\neq 0(x)$，得出矛盾。因而，$g(x)=h(x)$。(6)得证。

$P[x]$中的$0(x)$与数环中的数零起着相似的作用．任何多项式加$0(x)$不变，乘$0(x)$都化为$0(x)$．其他任何多项式都不具有$0(x)$的这一性质。

三、例题

例1 试确定数A，B，C，使$f(x)=g(x)$。这里$f(x)=3x^2-5x+3$，$g(x)=Ax(x-1)+B(x+2)(x-1)+Cx(x+2)$。

分析：把$g(x)$展开，合并同类项后，对比系数。

解：$g(x)=Ax^2-Ax+Bx^2+Bx-2B+Cx^2+2Cx$

$$=(A+B+C)x^2+(-A+B+2C)x-2B,$$

$$f(x)=3x^2-5x+3.$$

由多项式相等的定义，得

$$\begin{cases} A+B+C=3, \\ -A+B+2C=-5, \\ -2B=3. \end{cases}$$

解得$A=\frac{25}{6}$，$B=-\frac{3}{2}$，$C=\frac{1}{3}$。

例2 若多项式 $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2-8x+4$是一个整系数多项式的完全平方，则A、B为何值？

解：设$f(x)=[\varphi(x)]^2$，那末$\varphi(x)$一定是一个首项系数为1的二次多项式。设

$$\varphi(x)=x^2+Cx+D,$$

则 $[\varphi(x)]^2=x^4+2Cx^3+(C^2+2D)x^2+2CDx+D^2$。

对比$f(x)$的系数，得方程组

$$\begin{cases} 2C=A, & ① \\ C^2+2D=B, & ② \\ 2CD=-8, & ③ \\ D^2=4. & ④ \end{cases}$$

由④得$D=\pm 2$。先取$D_1=2$，由③得$C_1=-2$。又

由②和①，得$B_1 = 8$，$A_1 = -4$。同样，可取$D_2 = -2$，又得$C_2 = 2$，$B_2 = 0$，$A_2 = 4$。所以 $f(x)$ $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 2x + 2)^2$；或 $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = (x^2 + 2x - 2)^2$。

例3 实数域上的多项式

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

是实数域上一个多项式的立方，当且仅当$p = 3\sqrt[3]{r}$，$q = 3\sqrt[3]{r^2}$。试证明之。

证明：设$f(x)$是一个多项式的立方，那末这个多项式一定是一次多项式。设$f(x) = (Ax + B)^3 = A^3x^3 + 3A^2 \cdot Bx^2 + 3AB^2x + B^3$。对比系数，得

$$\begin{cases} A^3 = 1, \\ 3A^2B = p, \\ 3AB^2 = q, \\ B^3 = r. \end{cases}$$

解得$A = 1$，$p = 3B$，$q = 3B^2$，$B = \sqrt[3]{r}$。因而

$p = 3\sqrt[3]{r}$，$q = 3\sqrt[3]{r^2}$。

反之，设$p = 3\sqrt[3]{r}$，$q = 3\sqrt[3]{r^2}$，则

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + px^2 + gx + r \\ &= x^3 + 3\sqrt[3]{r}x^2 + 3\sqrt[3]{r^2} + r \\ &= \left(x + \sqrt[3]{r}\right)^3. \end{aligned}$$

（其中开方均指实三次方根）

习 题 2.2

1. 将下列多项式化为降幂形式：

(1) $7x^5+3x^3+(2x^4-x^3+x^2+x+1)(x^2-3x+1)$;

(2) $3x^4+4x^3+(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)$;

(3) $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6-(x^2-3x+1)(2x^2+3x+11)$;

(4) $(x-1+2i)(x^2-2ix-5-2i)-9+8i$.

2. 当a、b、c是什么数时，多项式

$f(x)=a(x^2-x-12)+b(x^2-6x+8)+c(x^2+x-6)$

$2x^2-5$ 是 0 (x) ?

3. 设$f(x)=x^2-5$，$g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c\cdot(x^2-x+2)$.问$a$、$b$、$c$ 是何数值时，$f(x)=g(x)$？

4. 证明：

$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2-x^n=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})\cdot(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n+1})$.

5. 已知多项式 $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$ 是多项式$g(x)$的平方，求$g(x)$。

6. 证明：多项式$f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$是二次多项式$g(x)=2x^2+ax+b$的平方的充要条件为$4q=p^2-4(m+1)$.

7. 用待定系数法证明：$f(x)=ax^2+bx+c$是完全平方的充要条件为$b^2-4ac=0$。在复数域上讨论。

8. 证明本节定理 2 。

§2.3 多项式的整除性

在一个数域中，任取两个数a、b $(b\neq0)$，则在这个数

域中总存在数c，使$a=bc$。但是，非数域的数环（如整数环）没有以上性质。在整数环中，取$a=2$，$b=3$，就不存在整数c，使$a=bc$。

多项式环也没有数域的上述性质。如$f(x)=x+1$，$g(x)=x^2+2$，显然，不存在多项式$h(x)$，使$f(x)=h(x)g(x)$。但若取$f(x)=x^3+2x$，则有$h(x)=x$，使$f(x)=h(x)g(x)$就是说，对于任意两个多项式$f(x)$和$g(x)$，不一定存在满足$f(x)=h(x)g(x)$的多项式$h(x)$。

定义1 设$f(x),g(x)\in P[x]$。若存在$h(x)\in P[x]$，满足$f(x)=g(x)h(x)$，则称$g(x)$整除$f(x)$或$g(x)$是$f(x)$的因式，也可说$f(x)$是$g(x)$的倍式。$h(x)$称为$f(x)$除以$g(x)$的商式。这时记为$g(x)\mid f(x)$。若这样的$h(x)$不存在，就称$g(x)$不整除$f(x)$，记为$g(x)\nmid f(x)$。

注意：若$h(x)$不是多项式，而是其他函数，虽满足$f(x)=g(x)h(x)$也不能称为整除。如函数式$x+1=(x^2+x)\cdot x^{-1}$成立，由于x^{-1}不是多项式，所以不能说x^2+x整除$x+1$。

若$g(x)\mid f(x)$，$f(x)\neq 0(x)$，那末$f(x)$的次数一定不会低于$g(x)$的次数。（读者想一想，这是为什么？）

下面列举整除的一些性质。

性质1 零次多项式（即非零常数）整除一切多项式。

证明：设有零次多项式$c\neq 0$，$f(x)$是任一多项式，则$f(x)=c\circ[c^{-1}f(x)]$。由于$c^{-1}f(x)$仍是多项式，故$c\mid f(x)$。

性质2 任意多项式整除$0(x)$。

证明：由$0(x)=0(x)f(x)$得知。

注意：$0(x)$也整除$0(x)$，因为$0(x)=0(x)0(x)$。

性质3　$c\cdot f(x)\mid f(x)$，其中c为非零常数。

证明：由$f(x)=[cf(x)]\cdot c^{-1}$得知。

从性质1、3可见，对任意多项式$f(x)$，非零常数c和$c\cdot f(x)$都是$f(x)$的因式，我们称这两种因式为$f(x)$的当然因式，$f(x)$的其他因式称为其非当然因式。

性质4　若$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则$f(x)=cg(x)$，其中c为非零常数。

证明：由$f(x)\mid g(x)$知，存在$h_1(x)$，使
$g(x)=h_1(x)f(x)$；再由$g(x)\mid f(x)$知，存在$h_2(x)$，使
$f(x)=h_2(x)g(x)$。因而

$$f(x)=h_1(x)h_2(x)f(x)。\qquad (1)$$

若$f(x)=0(x)$，则$g(x)=0(x)$，结论显然成立；若$f(x)\neq 0(x)$，根据上节证明的乘法消去律，(1)式两端消去$f(x)$，有

$$h_1(x)h_2(x)=1。$$

因为乘积$h_1(x)h_2(x)$的次数为$h_1(x)$的次数与$h_2(x)$的次数之和，故$h_1(x)$和$h_2(x)$都必须是零次多项式，设$h_2(x)=c\neq 0$，则$f(x)=cg(x)$。

性质5　若$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则$f(x)\mid h(x)$。（整除的传递性）

证明留给读者。

例1　试确定a、b，使$g(x)=(x-1)^2$整除$f(x)=x^4-5x^3+11x^2+ax+b$。

分析：$f(x)$为四次多项式，$g(x)$为二次多项式，若$f(x)$分解为$g(x)h(x)$，那末$h(x)$一定是二次多项式，且首项系数为1，常数项为b。这是因为$g(x)$的首项系数是1，常数

项为1。

解：设$h(x)=x^2+cx+b$，$f(x)=g(x)h(x)$，则

$x^4-5x^3+11x^2+ax+b=(x-1)^2(x^2+cx+b)$，右端化为$x^4+(c-2)x^3+(b-2c+1)x^2+(-2b+c)x+b$。与左端比较系数，得方程组

$$\begin{cases} c-2=-5, \\ b-2c+1=11, \\ -2b+c=a. \end{cases}$$

解出　$c=-3$，$b=4$，$a=-11$。因此

$$f(x)=x^4-5x^3+11x^2-11x+4.$$

例2　设$f(x)=x^4+px^2+q$，$g(x)=x^2+mx+1$，问在什么条件下，$g(x)|f(x)$？

分析：若$g(x)|f(x)$，那末由例1的分析可知，商$h(x)$一定形如x^2+kx+q。

解：设$h(x)=x^2+kx+q$，$f(x)=h(x)g(x)$，则

$h(x)g(x)=x^4+(k+m)x^3+(q+km+1)x^2+(mq+k)x+q$，而$f(x)=x^4+px^2+q$。对应系数相等：

$$\begin{cases} k+m=0, \\ q+km+1=p, \\ mq+k=0. \end{cases} \qquad (2)$$

由第一个方程，得$k=-m$。代入最后一个方程，得$k(1-q)=0$。若$k=0$，则$m=0$。代入第二个方程，得$q+1=p$；若$1-q=0$，则$q=1$，代入第二个方程，得$2-k^2=p$。所以，若$g(x)|f(x)$，必须：①$m=0$，$p=q+1$，或②$q=1$，$p=2-m^2$。

反之，若条件①、②有一成立，令$k=-m$，则(2)满

足．因此

$$(x^2+kx+q)g(x)=f(x)。$$

所以，$g(x)|f(x)$的充要条件是①或②成立。

习 题 2.3

1．试确定系数a，使多项式x^5-ax^2-ax+1被$(x+1)^2$整除。

2．设$f(x)=x^3+px+q$，$g(x)=x^2+mx-1$，证明：$g(x)|f(x)$的充要条件是$p+q^2+1=0$，且$q=m$。

3．设多项式$f(x)$与$g(x)$的次数相同，求证：若$f(x)|g(x)$，则$g(x)|f(x)$。

4．试确定数p和q，使x^4+1被x^2+px+q整除。

5．已知$(x^2+p)|(ax^3+bx^2+cx+d)$，$p\neq0$，求证：$ad=bc$。

6．设$f(x)=(x+1)^{2n}+2x(x+1)^{2n-1}+\cdots+2^nx^n(x+1)^n$，求证：$x^{n+1}$整除$(x-1)f(x)+(x+1)^{2n+1}$。

7．证明：$(x^2+x+1)\nmid(4x^4+x^3-2x-3)$。

8．证明本节性质5。

9．若$f(x)|g(x)$，$f(x)|h(x)$，求证：$f(x)|[g(x)\pm h(x)]$。

10．求证：可以整除任意多项式的多项式一定是零次多项式。

11．求证：可以被任意多项式整除的多项式一定是$0(x)$。

12．若$f(x)g(x)|h(x)g(x)$，$g(x)\neq0(x)$，证明：$f(x)|h(x)$。

13．求证：可以被任意非零多项式整除的非零多项式是不存在的。

§2.4　带余除法

前面讲过，多项式乘法的逆运算在多项式环中不能通行，下面，我们从另一个角度来推广除法的概念。

大家记得，算术中讲过整数的带余除法。如用5去除17，则商3余2，其中2是一个小于除数5的非负整数

多项式也可以类似地进行这种带余除法。如用$g(x)=x^2-2x+3$去除$f(x)=2x^3+3x^2-x+2$：

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^2-2x+3 & 2x^3+3x^2-x+2 & 2x+7 \\
 & 2x^3-4x^2+6x & \\
\hline
 & 7x^2-7x+2 & \\
 & 7x^2-14x+21 & \\
\hline
 & 7x-19 &
\end{array}
$$

求得商式$q(x)=2x+7$，余式$r(x)=7x-19$，它们之间有关系式$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$。

但是，对于任意两个多项式$f(x)$和$g(x)$，是否总能找到这样的$q(x)$和$r(x)$呢？若能找到，是否唯一呢？下面的定理回答了这个问题。

定理1　对于数域P上任意两个多项式$f(x)$和$g(x)$，其中$g(x)\neq 0(x)$，总有数域P上的多项式$q(x)$和$r(x)$，满足

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), \tag{1}$$

其中$r(x)$或者是$0(x)$，或者比$g(x)$次数低。这里$r(x)$称为余式，$q(x)$称为商式。而且，这样的$q(x)$和$r(x)$是唯一的。

分析：证明分两步：首先用逐项构造的方法，作出$q(x)$和$r(x)$，说明它们的存在性。

其次，假定还有$q_1(x)$和$r_1(x)$满足以上条件，我们证明$q(x)=q_1(x)$，$r(x)=r_1(x)$，于是说明$q(x)$和$r(x)$是唯一的。

证明：设

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$,

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$, $(b_m\neq 0)$

若$f(x)$是$0(x)$，或$f(x)$的次数低于$g(x)$的次数，那末直接取$q(x)=0(x)$，$r(x)=f(x)$即可。

若$f(x)$的次数为$n(a_n\neq 0)$，$n\geqslant m$，作积$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$，则它的首项是$a_nx^n$，和$f(x)$的首项相同。设

$$f(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)+f_1(x),$$

则$f_1(x)$或者是$0(x)$，或者次数低于n，设为n_1（不一定正好是$n-1$）。若$n_1<m$，或$f_1(x)=0(x)$，则可取$r(x)=f_1(x)$，$q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$，否则再对$f_1(x)$继续进行上述步骤，得

$$f_1(x)=\frac{a'_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x)+f_2(x),$$

这里a'_{n_1}代表$f_1(x)$的首项系数。从而

$$f(x)=\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a'_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}\right)g(x)+f_2(x).$$

这种步骤可以继续进行下去，直至在余式中得到$0(x)$或次数低于m的多项式为止。

但这一过程不可能无限地进行，因为每进行一步，就使$f(x)$的次数至少降低一次。

设最后得到的商式为$q(x)$，余式为$r(x)$，那末，$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$。

下面证唯一性。

假定还有$q_1(x)$和$r_1(x)$满足定理的要求：

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$

其中$r_1(x)$或者是$0(x)$，或者比$g(x)$次数低，因而$q(x)g(x)+r(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$，

$$[q(x)-q_1(x)]g(x)=r_1(x)-r(x).$$

若$q(x)\neq q_1(x)$，则$q(x)-q_1(x)\neq 0(x)$，等式右端的多项式$r_1(x)-r(x)\neq 0(x)$，其次数不低于$g(x)$的次数m，而$r_1(x)$和$r(x)$的次数均低于m，所以其差的次数也低于m，出现矛盾。故$q(x)=q_1(x)$，从而$r_1(x)-r(x)=0(x)$，$r_1(x)=r(x)$。

推论1 设$f(x)$、$g(x)\in P[x]$，则$g(x)|f(x)$的充要条件是$g(x)$除$f(x)$的余式$r(x)=0(x)$。

证明：由定理1知，存在唯一的多项式$q(x)$和$r(x)$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x).$$

若$r(x)=0(x)$，则显然$f(x)=q(x)g(x)$，即$g(x)|f(x)$；反之，设$g(x)|f(x)$，那末存在$q(x)$使$f(x)=q(x)g(x)=q(x)g(x)+0(x)$，根据定理1，余式是唯一的，故$r(x)=0(x)$。推论得证。

从前面定理1的证明过程可见，$q(x)$和$r(x)$的系数是由$f(x)$和$g(x)$的系数经四则运算得到的，因而$q(x)$和$r(x)$也是数域P上的多项式。当数域P扩大为数域$\overline{P}$时，根据定理1，

$q(x)$和$r(x)$是唯一的，所以它们不会因此而变更。因而，一个多项式是否整除另一个多项式，不会因数域扩大而改变。如多项式x^2+1，$2x-1$，$4x^2-1$既是有理数域上的多项式，也是实数域及复数域上的多项式。$(2x-1)|(4x^2-1)$和$(x^2+1)\nmid(4x^2-1)$在各数域上的多项式环中都成立，与数域的扩大无关。

定理1不仅指出了商和余式的存在性和唯一性，而且在存在性的证明中也具体给出了求商和余式的方法。这种除法叫做带余除法，也称为欧几里得(*Euclid*)注除法。

例1 设$f(x)=5x^4+3x^3+2x^2+x-1$，$g(x)=x^2+2x-2$。求用$g(x)$除$f(x)$的商式和余式。

解：方法一：长除法。

$$
\begin{array}{l|r|l}
(g(x)) & (f(x)) & (q(x)) \\
x^2+2x-2 & 5x^4+3x^3+2x^2+x-1 & 5x^2-7x+26 \\
 & 5x^4+10x^3-10x^2 & \\
\hline
 & -7x^3+12x^2+x-1 & (f_1(x)) \\
 & -7x^3-14x^2+14x & \\
\hline
 & 26x^2-13x-1 & (f_2(x)) \\
 & 26x^2+52x-52 & \\
\hline
 & -65x+51 & (r(x))
\end{array}
$$

得商$q(x)=5x^2-7x+26$，余式$r(x)=-65x+51$。

方法二：待定系数法。

分析：由于$f(x)$是4次多项式，$g(x)$是2次多项式，所以

注　*Euclid*，著名古希腊数学家，著有《原本》。

$q(x)$应是2次多项式，$r(x)$若不是常数，则只能是一次多项式。

下面是问题的解法：

设 $q(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$，$r(x)=b_1x+b_2$，由 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，得

$$5x^4+3x^3+2x^2+x-1$$
$$=(a_1x^2+a_2x+a_3)(x^2+2x-2)+(b_1x+b_2)$$
$$=a_1x^4+(2a_1+a_2)x^3+(a_3-2a_1+2a_2)x^2+(2a_3-2a_2+b_1)x+(-2a_3+b_2).$$

比较系数，得方程组：

$$\begin{cases} a_1=5, \\ 2a_1+a_2=3, \\ a_3-2a_1+2a_2=2, \\ 2a_3-2a_2+b_1=1, \\ -2a_3+b_2=-1. \end{cases}$$

解得 $a_1=5$，$a_2=-7$，$a_3=26$，$b_1=-65$，$b_2=51$。

$$q(x)=5x^2-7x+26,\quad r(x)=-65x+51.$$

注意：一般地说，多项式的带余除法多用竖式，极少用待定系数法。

习 题 2.4

1. 设$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，$g(x)=x^2+2x-1$，求用$g(x)$除$f(x)$的余式和商式。

2. 设$f(x)=4x^3+x^2$，$g(x)=x+1+i$，求用$g(x)$除$f(x)$的余式和商式。

3. 设$f(x)=x^3-3x^2-x-1$，$g(x)=3x^2-2x+1$，求用$g(x)$除$f(x)$的余式和商式。

4. 已知除式$g(x)=2x^2+x-3$，商式$q(x)=x^2+3$，余式$r(x)=3x+5$，求被除式$f(x)$。

5. 已知被除式$f(x)=x^4+x^3-5x^2+12x$，商式$q(x)=x^2+3x-1$，余式$r(x)=2x^2+10x$，求除式$g(x)$。

§2.5 综合除法

本节继续讨论带余除法，研究除式为一次多项式的情况。

定理1（余数定理） 设多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0 \qquad (1)$$

是数域P上的多项式，$c\in P$，则用一次式$x-c$除$f(x)$的余数$r=f(c)$注。

注意： 由于除式为一次多项式，所以余式只能是常数。

证明：设 $f(x)=q(x)(x-c)+r$。

令$x=c$，得

$$f(c)=q(c)(c-c)+r=r.$$

即 $f(c)=r$。

证毕。

例如，$x-1$除多项式$f(x)=2x^4+3x^3+x^2-2x+1$的余数$r=f(1)=2+3+1-2+1=5$。

推论1（因式定理） 设$f(x)\in P[x]$，$c\in P$，则$(x-c)$

注 余数定理及下面的因式定理也称裴蜀(Bezout)定理。E. Bezout（1730—1783），法国数学家。

$|f(x)$的充要条件是$f(c)=0$。

证明：由上节推论1，$(x-c)|f(x)$等价于$x-c$除$f(x)$的余式为$0(x)$.由余数定理，余数$r=f(c)$.因此，$(x-c)|f(x)$等价于$f(c)=0$。

定义1　设$f(x)\in P[x]$，$c\in P$.若$f(c)=0$,则称c为$f(x)$在数域P中的根或零点.

由因式定理，c为$f(x)$的根的充要条件是

$$(x-c)|f(x)。$$

例1　验证2是否为多项式

$$f(x)=x^5-2x^4+x^3-2x^2-1$$

的根?

分析：由上所述，只须查看$x-2$是否整除$f(x)$。

解：

$$\begin{array}{r|l|l}
x-2 & x^5-2x^4+x^3-2x^2-1 & x^4+x^2 \\
 & x^5-2x^4 & \\
\hline
 & \qquad\qquad x^3-2x^2-1 & \\
 & \qquad\qquad x^3-2x^2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -1 &
\end{array}$$

$f(2)=-1\neq 0$，因此2不是$f(x)$的根.

下面将除式为$x-c$时的带余除法加以简化.

设$f(x)$如(1)所示，又假定$f(x)=(x-c)q(x)+r$，则$q(x)$一定是$n-1$次多项式.设

$$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0。$$

则　$$(x-c)q(x)+r=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-cb_{n-1})x^{n-1}$$
$$+\cdots+(b_0-cb_1)x+(-cb_0+r)。$$

对比系数，得

$a_n=b_{n-1}$， $a_{n-1}=b_{n-2}-cb_{n-1}$， …， $a_1=b_0-cb_1$， $a_0=r-cb_0$。或者$b_{n-1}=a_n$， $b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}$， …， $b_0=a_1+cb_1$， $r=a_0+cb_0$。

这样一来，可以由$f(x)$和c依次求出商$q(x)$的系数b_{n-1}，b_{n-2}， …， b_1， b_0和r。

也可以写成如下的格式：

$$
\begin{array}{l|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
c & & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \cdots & cb_1 & cb_0 \\
\hline
 & a_n & a_{n-1}+cb_{n-1} & a_{n-2}+cb_{n-2} & \cdots & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 \\
 & \| & \| & \| & & \| & \| \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r
\end{array}
$$

首先，把$f(x)$按降幂排列的系数写在第一横行，若有缺项添0。第三横行写商$q(x)$的系数及余数r。$q(x)$的首项系数$b_{n-1}=a_n$；把c和b_{n-1}的乘积写在第二横行a_{n-1}下面。而cb_{n-1}下面填这两个数的和，这就是$q(x)$的第二个系数b_{n-2}；再把c和b_{n-2}的乘积写在第二行a_{n-2}的下面，$a_{n-2}+cb_{n-2}$也同样写在cb_{n-2}的下面，作为b_{n-3}；如此自左至右地算下去，直到最后得出b_0和r。第三横行共$n+1$个数，前n个数是$q(x)$的系数，最后一个数是余数r。

为清楚起见，在第二横行与第三横行之间划一条横线，横行的左侧划一竖线，外面写上c。

这样的格式大大简化了带余除法的步骤（不过，它只适用于除式是$x-c$的情况）．上述求$f(x)$除以$x-c$的商式和余式的方法，称为综合除法，也称霍纳（*Horner*）方法。注

注 *W.G.Horner*(1786—1837)，英国数学家．

现在我们用综合除法重作例1.

	1	−2	1	−2	0	−1
2		2	0	2	0	0
	1	0	1	0	0	−1

得余数$f(2)=-1\neq 0$，而商$q(x)=x^4+x^2$.

例2 求多项式$f(x)=2x^4-15x^2-2x-33$除以$x+3$的商和余数。

注意： $f(x)$缺三次项，应补上$0x^3$一项，$x+3$可看作$x-(-3)$.

解：用综合除法.

	2	0	−15	−2	−33
−3		−6	18	−9	33
	2	−6	3	−11	0

得余数为0，商式为$2x^3-6x^2+3x-11$，即-3是$f(x)$的根.

例3 判断2是不是$f(x)=x^5-2x^4+x^3+x^2+2x-3$的根？

分析：用综合除法求出$x-2$除$f(x)$的余数，看是否为0.

解：

	1	−2	1	1	2	−3
2		2	0	2	6	16
	1	0	1	3	8	13

所以$f(2)=13\neq 0$，2不是$f(x)$的根.

例4 证明：$(x-1)\mid f(x)$的充要条件是$f(x)$的系数之和等于零.

证明： 设$f(x)$形如(1)．因为$(x-1)|f(x)$的充要条件是$f(1)=0$；而$f(1)=a_n\cdot 1^n+a_{n-1}\cdot 1^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 1+a_0=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$．所以$(x-1)|f(x)$的充要条件是$f(x)$的系数之和为零。

例5 k为何值时$f(x)=x^4+3x^2-kx+2$除以$x-1$的余数为3？

分析： $f(x)$除以$x-1$的余数等于$f(1)$。

解： 由于$f(1)=1+3-k+2=6-k$，故

$$6-k=3，或k=3。$$

习　题　2.5

1．求x^5-3x-1除以$x-2$的商式和余数。

2．求$x^4-2x^3+x^2+2x-1$除以$x+1$的商式和余数。

3．已知$f(x)=3x^5-2x^2+11x-2$，求$f\left(\frac{1}{2}\right)$。

4．2 是不是$f(x)=x^4-x^3+12x^2-10x+11$的根？

5．证明：$f(x)$被$x+1$整除的充要条件是$f(x)$的偶次项系数之和等于奇次项系数之和。

6．用综合除法验证$(x-a)|(x^n-a^n)$，并讨论当n为何正整数时，$(x+a)|(x^n+a^n)$，这里$a\neq 0$。

7．若多项式$f(x)=-x^4-3x^2+ax-b$除以$x+1$时余3，除以$x-1$时余-2，求a及b。

8．若$(x-\cos\alpha-i\sin\alpha)|(x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n)$，求证：$p_{n-1}\sin\alpha+p_{n-2}\sin 2\alpha+\cdots+p_1\sin(n-1)\alpha+\sin n\alpha=0$，这里$p_1$，$p_2$，…，$p_n$为实数。

9．求证：若$(x-1)|f(x^n)$，则$(x^n-1)|f(x^n)$。

10. 求证：多项式$f(x)$除以一次多项式$ax+b$的余数为$f\left(-\frac{b}{a}\right)$。

§2.6 多项式按另一多项式的方幂展开

设$f(x)=3x^4+7x^3-9x^2+32$，不难验证

$$f(x)=3(x+2)^4-17(x+2)^3+21(x+2)^2+24(x+2)-12.$$

这时，$f(x)$表示为另一个多项式的方幂与数乘积之和。一般地，我们有下面的定义：

定义1 设$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，且都不是$0(x)$，如果多项式$f(x)$表示为

$$f(x)=r_k(x)g^k(x)+r_{k-1}(x)g^{k-1}(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x), \tag{1}$$

其中$r_k(x)\neq 0(x)$，$r_0(x)$，$r_1(x)$，$r_2(x)$，…，$r_{k-1}(x)$，$r_k(x)$是数域P上的多项式，它们或者是$0(x)$，或者次数低于$g(x)$的次数，则称(1)式为$f(x)$按$g(x)$的方幂展开式。

对于一般的多项式$f(x)$和$g(x)$，$f(x)$能不能按$g(x)$的方幂展开呢？展开的形式是不是唯一的呢？下面的定理回答了这个问题。

定理1 设$f(x)$和$g(x)$是数域P上的非零多项式，$g(x)$的次数$m\geqslant 1$，则在$P[x]$中存在唯一的多项式组

$$r_0(x),\ r_1(x),\ \cdots,\ r_k(x),\ (r_k(x)\neq 0(x)) \tag{2}$$

满足（1）式，其中每个多项式或为$0(x)$，或次数低于m。

分析：证明分两步，存在性的证明，是利用累次带余除

法，找出（2）组的各多项式；唯一性的证明是假定$f(x)$还有一个（1）形的展开式，则这个展开式与原展开式重合。

证明：存在性。

由§2.4定理1，存在$q_0(x)$和$r_0(x)$，满足

$$f(x)=q_0(x)g(x)+r_0(x)。$$

若商$q_0(x)$的次数不小于$g(x)$的次数m，则再用$g(x)$去除$q_0(x)$，设得

$$q_0(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$

$$q_1(x)=q_2(x)g(x)+r_2(x),$$

$$\cdots\cdots$$

这样作下去，商式的次数越来越低，因而一定出现某商式（设为$q_{k-1}(x)$），其次数$<m$。即

$$q_{k-2}(x)=q_{k-1}(x)g(x)+r_{k-1}(x)。$$

令$r_k(x)=q_{k-1}(x)(\neq 0(x))$.以上表达式逐次代入，得

$$f(x)=q_0(x)g(x)+r_0(x)=[q_1(x)g(x)+r_1(x)]g(x)+r_0(x)$$

$$=q_1(x)g^2(x)+r_1(x)g(x)+r_0(x)=\cdots$$

$$=r_k(x)g^k(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x)。$$

唯一性。

假定有多项式$d_0(x)$，$d_1(x)$，…，$d_l(x)$，其中$d_l(x)\neq 0(x)$，各$d_i(x)$或为$0(x)$，或次数小于m，满足

$$f(x)=d_l(x)g^l(x)+\cdots+d_1(x)g(x)+d_0(x)。\qquad (3)$$

比较（1）和（3），得

$$r_k(x)g^k(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x)=d_l(x)g^l(x)+\cdots$$
$$+d_1(x)g(x)+d_0(x)。$$

移项，提出$g(x)$后，有

$$[d_l(x)g^{l-1}(x)-r_k(x)g^{k-1}(x)+\cdots+d_1(x)$$

$-r_1(x)]g(x)=r_0(x)-d_0(x)$。 （4）

（4）式方括号中的多项式若不是$0(x)$，则与$g(x)$之积$r_0(x)-d_0(x)\neq 0(x)$，从而（4）式左端次数$\geqslant m$，这与右端的$r_0(x)$及$d_0(x)$或为$0(x)$或次数低于m的假设矛盾。所以（4）式左端在方括号内的多项式$=0(x)$。由此得出$d_0(x)=r_0(x)$。把（4）式方括号中的多项式写出来，就是

$$d_l(x)g^{l-1}(x)-r_k(x)g^{k-1}(x)+\cdots\cdots+d_1(x)-r_1(x)=0(x)。$$

移项后，又得

$$g(x)[d_l(x)g^{l-2}(x)-r_k(x)g^{k-2}(x)+\cdots+d_2(x)-r_2(x)]=r_1(x)-d_1(x)。$$

同样的推理，可得$r_1(x)=d_1(x)$。

上述过程一直进行下去。如果这时$l>k$，最后必然得出

$$d_l(x)g^{l-k-1}(x)+\cdots+d_{k+2}(x)g(x)+d_{k+1}(x)=0(x)。$$

或

$$[d_l(x)g^{l-k-2}(x)+\cdots+d_{k+2}(x)]g(x)=-d_{k+1}(x)。$$

若$-d_{k+1}(x)\neq 0(x)$，则其次数低于m，与上式矛盾，故$d_{k+1}(x)=0(x)$。同样的推理，可得

$$d_{k+2}(x)=0(x),\ \cdots,\ d_l(x)=0(x)。$$

但$d_l(x)\neq 0(x)$，这就说明$l>k$是不正确的。仿此可证$k>l$也不成立。于是得出$k=l$，且$r_i(x)=d_i(x)$，$i=1,2,\cdots,k$。

证毕。

定理1存在性的证明过程，也给出了一个多项式按另一

个多项式的方幂展开的方法。若需要将$f(x)$按$g(x)$的方幂展开，可以先用$g(x)$来除$f(x)$，设商为$q_0(x)$，余式为$r_0(x)$；再用$g(x)$除商$q_0(x)$，又得商$q_1(x)$，余式$r_1(x)$；这样做下去，直到商式次数低于$g(x)$的次数为止。设最后的商式和余式为$q_{k-1}(x)$和$r_{k-1}(x)$，令$r_k(x)=q_{k-1}(x)$，那末$f(x)$按$g(x)$的方幂展开式就是：

$$f(x)=r_k(x)g^k(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x).$$

例1 将$f(x)=x^4+3x^3-2x^2+x-2$ 按$g(x)=x^2+x+1$的方幂展开。

解：连续用带余除法，作竖式时可自左至右扩展：

$(g(x))$	$(f(x))$	$(q_0(x))$	$(r_2(x))$ ‖ $(q_1(x))$
x^2+x+1	$x^4+3x^3-2x^2+x-2$	x^2+2x-5	1
	$x^4+x^3+x^2$	x^2+x+1	
	$2x^3-3x^2+x-2$	$x-6$	
	$2x^3+2x^2+2x$	$(r_1(x))$	
	$-5x^2-x-2$		
	$-5x^2-5x-5$		
	$4x+3$		
	$(r_0(x))$		

由此可见，

$$f(x)=g(x)(x^2+2x-5)+(4x+3),$$

$$x^2+2x-5=1\times g(x)+(x-6),$$

所以，$r_0(x)=4x+3$，$r_1(x)=x-6$，$r_2(x)=1$。

$$\begin{aligned} f(x) &= r_2(x)g^2(x) + r_1(x)g(x) + r_0(x) \\ &= (x^2+x+1)^2 + (x-6)(x^2+x+1) \\ &\quad + (4x+3). \end{aligned}$$

上式是$f(x)$按$g(x)$的方幂的展开式。

当$g(x)$为一次多项式$x-c$时，$f(x)$按$x-c$的方幂的展开式特别重要。上面的带余除法，可用连续的综合除法代替。这种用综合除法得出$f(x)$按$x-c$的方幂展开式的方法，称为秦九韶程序，秦九韶程序在方程的近似求解问题中是很有用的（详见§6.4）。[注]

例2 将$f(x)=3x^4+7x^3-9x^2+32$按$x+2$的方幂展开。

解：连续用综合除法，依次向下写：

-2	3	7	-9	0	32	
		-6	-2	22	-44	
(q_0)	3	1	-11	22	-12	(r_0)
		-6	10	2		
(q_1)	3	-5	-1	24 (r_1)		
		-6	22			
(q_2)	3	-11	21 (r_2)			
		-6				
$(r_4=q_3)$	3	-17 (r_3)				
	3					

注 秦九韶，又名秦道古，宋代数学家，著有《数书九章》。

所以，所求的展开式是

$$f(x)=3(x+2)^4-17(x+2)^3+21(x+2)^2+24(x+2)-12.$$

*对于$f(x)$按$x-c$的方幂展开问题，还可以用泰勒（Taylor）公式解决。注

学过数学分析的读者知道，实n次多项式$f(x)$是任意次可微的，且n阶以上的导数都是零。$f(x)$在$x=c$点的泰勒展开式为

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}+\cdots+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+f(c). \quad (5)$$

(5)式实际上就是$f(x)$按$x-c$的方幂展开式。

对于任意数域上的多项式，泰勒展开式仍然成立（多项式的导数定义参见§4.4）。

如例2中$f(x)$的各阶导数为

$$f'(x)=12x^3+21x^2-18x,$$

$$f''(x)=36x^2+42x-18,$$

$$f'''(x)=72x+42,$$

$$f^{IV}(x)=72.$$

当$x=-2$时，不难算出

$$f(-2)=-12,\ f'(-2)=24,\ \frac{f''(-2)}{2!}=21,$$

$$\frac{f'''(-2)}{3!}=-17,\ \frac{f^{IV}(-2)}{4!}=3.$$

注 B.Taylor（1685—1731），英国数学家。

按照（5）式，应有

$$f(x)=3(x+2)^4-17(x+2)^3+21(x+2)^2+24(x+2)-12.$$

习　题　2.6

1. 将多项式$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$按多项式x^2+x+1的方幂展开。

2. 将多项式$3x^3+2x^2+x-1$按$x-1$的方幂展开。

3. 将多项式$x^3+2x^2-23x-60$按$x-2$的方幂展开。

4. 将多项式x^5-1按x^2+x+1的方幂展开。

5. 将多项式$x^3+12x^2+30x+5$按$x+4$的方幂展开。

6. 将多项式x^4+2x^2+x-1按$x-i$的方幂展开。

7. 将多项式x^7-1按$x-1$的方幂展开。

本 章 题 要

1. 数域P上一元多项式的降幂形式为

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

其中$a_i\in P$，$i=n$，$n-1$，…，0．

2. 一元多项式的相等：次数相等且对应系数相等．

3. 一元多项式环$P[x]$中的运算：

（1）加、减法：

设　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$,

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0\quad(m\leqslant n)$,

则　$f(x)\pm g(x)=a_nx^n+\cdots+(a_m\pm b_m)x^m+\cdots+(a_0\pm b_0)$．

（2）乘法：

$f(x)$和$g(x)$表达式同上，其积为

$f(x)g(x)=a_nb_mx^{m+n}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+a_0b_0$.

各运算满足通常的算律.

4.带余除法:

对于任意的$f(x)$、$g(x)\in P[x]$, $g(x)\neq 0(x)$, 存在唯一的商式$q(x)$和余式$r(x)$, 满足

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x).$$

其中$r(x)$或者是$0(x)$, 或者次数低于$g(x)$的次数.

当$r(x)=0(x)$时, $g(x)|f(x)$.

求余式和商式, 在除式为$x-c$时用综合除法更为方便.

5.余数定理与因式定理:

$x-c$除$f(x)$的余数等于$f(c)$.

$(x-c)|f(x)$当且仅当$f(c)=0$.

6.非零多项式$f(x)$可按$g(x)$(次数$\geqslant 1$)的方幂展开, 即唯一地表为

$$f(x)=r_k(x)g^k(x)+r_{k-1}(x)g^{k-1}(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x).$$

其中$r_k(x)\neq 0(x)$, $r_0(x)$, $r_1(x)$, $\cdots$, $r_k(x)$为$0(x)$或次数低于$g(x)$的多项式.

上述展开式, 可通过一系列的带余除法求得.

复 习 题 二

1.若$f(x)=f(-x)$, 求证$f(x)$的奇次项系数都是零.

2.证明:

$f(x)=(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+\cdots+x^{99}+x^{100})$

的展开式中无奇次项.

3.试确定a与b的值, 使$x^4+(a+b)x^3+(a-b)x^2+(a^2+2b-1)\cdot x+a+b+4$被$(x-1)^2$整除.

4.试求多项式乘积

$$(1-3x+2x^2)^{743}(1+3x-2x^2)^{744}$$

展开式中各系数之和.

5.试求以下乘积

$(1+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n)(x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n)$

中x^n和x^{n-2}的系数.

6.设$f(x)$为一多项式，$f(a)=r_1$，$f(b)=r_2$，$a\neq b$，试求用$(x-a)(x-b)$除$f(x)$的余式.

7.试作一个四次多项式$f(x)$，使$f(1)=f(2)=f(3)=0$，$f(4)=6$，$f(5)=72$.

8.设$f(x)$为三次多项式，已知$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(3)=-5$，$f(4)=-23$，求$f(\frac{3}{2})$.

9.证明：

$$(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)^2$$

$=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\cdots+(n+1)x^n+nx^{n-1}+\cdots+3x^2+2x+1$

10.证明：若$(x-c)^2|(x^5-5qx+4r)$，则$q^5=r^4$.

11.将x^4-2x^2-2按x^2-x+1的方幂展开.

12.将$3x^3-10x^2+13$按$x-2$的方幂展开.

第三章 最大公因式

本章介绍一元多项式最大公因式与最小公倍式的概念、性质及有关方法。

§3.1 最大公因式的概念

一、从公因式到最大公因式

定义1 设$f(x)$，$g(x)$是数域P上的多项式。若存在$h(x)\in P[x]$，满足$h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，则称$h(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式。

所以，两个多项式的公共因式就是其公因式。如$x-1$是x^2-1与$(x-1)^2$的公因式。

零次多项式（非零常数）是任意两个多项式的公因式，故称之当然公因式。

如x^6-1和x^4-1除了当然公因式外，$k(x-1)$，$k(x+1)$，$k(x^2-1)$也是它们的公因式，这里k是任意非零常数。此外，没有其他公因式。这些公因式中，$k(x^2-1)$是所有公因式的倍式，或者说，所有公因式都是它的因式。这种公因式，在下面的讨论中十分重要。

定义2 设$f(x)$，$g(x)\in P[x]$。如果$d(x)\in P[x]$是$f(x)$和$g(x)$的公因式，且$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的所有公因式的倍式，则称$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，记为$d(x)$

$= (f(x), g(x))$.

所以，最大公因式有两个含义：第一，首先是公因式；第二，又是所有公因式的倍式，即体现“最大性”。

二、性质

性质1 若$d(x)$与$d_1(x)$都是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，那末$d(x)$与$d_1(x)$至多相差一个非零常数因子。另一方面，$f(x)$和$g(x)$的最大公因式与任意非零常数的积也是其最大公因式。

证明：由于$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的最大公因式，而$d_1(x)$自然也是其公因式，由最大公因式的定义，$d_1(x)\mid d(x)$。同理$d(x)\mid d_1(x)$。$d(x)$与$d_1(x)$互相整除。由§2.3性质4，存在常数$c\neq 0$，使$d_1(x)=cd(x)$。

性质1第二部分的证明是显然的。

证毕。

性质1说明两个多项式的最大公因式至多相差一个非零常数因子，因而在不计非零常数因子的意义下（即系数成比例的同次多项式不认为有区别），可以认为最大公因式是唯一的。下面，让我们先来分析几种特殊情况的最大公因式。

性质2 $f(x)=(f(x),0(x))$.特别是$0(x)=(0(x),0(x))$.

证明：（1） $f(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid 0(x)$，$f(x)$是它们的公因式；

（2） 设$g(x)$是$f(x)$和$0(x)$的任一公因式，自然有$g(x)\mid f(x)$。因而$f(x)=(f(x),0(x))$.

性质3 若$g(x)\mid f(x)$，则$g(x)=(f(x),g(x))$.

证明：（1） 由于$g(x)|f(x)$，$g(x)|g(x)$，所以$g(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式；

（2） 设$h(x)$是$f(x)$与$g(x)$的任一公因式，那末自然有$h(x)|g(x)$，故$g(x)$被$f(x)$与$g(x)$的任一公因式整除。所以

$$g(x)=(f(x),\ g(x))。$$

三、辗转相除法

在一般的情况下，两个多项式的最大公因式是不是总存在呢？用什么方法来求呢？下面对这些问题一并加以解决。

定理1 设$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，且不全为$0(x)$，则$f(x)$和$g(x)$的最大公因式一定存在，且除一个非零常数因子外，是唯一的。

证明：分两部分，先证最大公因式存在。

不妨设$g(x)\neq 0(x)$。利用带余除法，以$g(x)$除$f(x)$，设得商$q_1(x)$和余式$r_1(x)$。若$r_1(x)\neq 0(x)$，再以$r_1(x)$除$g(x)$，得商$q_2(x)$及余式$r_2(x)$.若$r_2(x)\neq 0(x)$，则又以$r_2(x)$除$r_1(x)$.如此继续下去，每次都是以$r_i(x)$除$r_{i-1}(x)$，每一步都至少使余式降低一次，经有限次带余除法后，必然得出这样一个$r_k(x)$，它整除$r_{k-1}(x)$.（注意：如把$f(x)$看作$r_{-1}(x)$，$g(x)$看作$r_0(x)$，那末这里也包括了$g(x)|f(x)$及$r_1(x)|g(x)$的情况）即

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),$$

$$\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$r_{k-3}(x)=q_{k-1}(x)r_{k-2}(x)+r_{k-1}(x),$$

$$r_{k-2}(x)=q_k(x)r_{k-1}(x)+r_k(x),$$

$$r_{k-1}(x)=q_{k+1}(x)r_k(x).$$

下面，我们证明$r_k(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

首先，从（1）中最后的等式，知$r_k(x)|r_{k-1}(x)$。又由倒数第二式，可以看出$r_k(x)|r_{k-2}(x)$，这是因为$r_k(x)$整除右端两项。按照这个方法，自下向上推，最后可得$r_k(x)|r_2(x)$，$r_k(x)|r_1(x)$，$r_k(x)|g(x)$，及$r_k(x)|f(x)$。所以$r_k(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式。

其次，如果$h(x)$是$f(x)$和$g(x)$的任一公因式，那末，由（1）的第一个等式可知，$h(x)$整除$r_1(x)$。同理，根据第二个等式，$h(x)$整除$r_2(x)$，再自上而下推，最后得出$h(x)|r_{k-2}(x)$，$h(x)|r_{k-1}(x)$，$h(x)|r_k(x)$。

因而，$r_k(x)=(f(x),\ g(x))$。

至于唯一性，由本节性质1直接可得。

证毕。

定理1的证明过程，也提供了一个求最大公因式的方法，称为辗转相除法。以下，我们通过具体例子说明这个方法。

例1 求$f(x)=x^5+2x^4+4x^3+x^2+3x-1$和$g(x)=x^4+3x^2+2$的最大公因式。

解： 用辗转相除法。

先用$g(x)$除$f(x)$，得

$$f(x)=(x+2)g(x)+(x^3-5x^2+x-5);$$

用余式$r_1(x)=x^3-5x^2+x-5$除$g(x)$，得

$$g(x)=(x+5)r_1(x)+27x^2+27.$$

用$r_2(x)=27(x^2+1)$除$r_1(x)$，结果$r_2(x)|r_1(x)$。

因此，$r_2(x)=(f(x),\ g(x))$。由于求最大公因式不计非零常数因子，可以认为

$$x^2+1=(f(x),\ g(x)).$$

注意：由$d_1(x)=(f(x),g(x))$，$d_2(x)=(f(x),g(x))$，不能得出$d_1(x)=d_2(x)$，只能断定$d_1(x)$和$d_2(x)$系数成比例。

例 2 求多项式

$$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3,$$

$$g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

的最大公因式。

注意：在用$g(x)$除$f(x)$时，所得的商及余式的系数会出现分数，给计算带来不便，为此，可用一个适当的非零数来乘(或除)被除式、除式或余式。这样自然会改变商式，然而对余式的影响却不过是差一个非零常数因子。由于求最大公因式的过程只用到余式，用不到商式，而且不计非零常数因子的不同，所以这是允许的。在辗转相除的任何一步，都可以这样做。不过，这种做法在一般的带余除法中是不允许的。凡是用到商式的情况，都不能随意用数来乘（或除）任一多项式。

解：用竖式写出：

	$(f(x))$	$(g(x))$	
	$x^4-2x^3-4x^2+4x-3$ $\times 2)$	$2x^3-5x^2-4x+3$ $\times 3)$	
x	$2x^4-4x^3-8x^2+8x-6$ $2x^4-5x^3-4x^2+3x$	$6x^3-15x^2-12x+9$ $6x^3-28x^2+30x$	$-2x$
	x^3-4x^2+5x-6 $\times 2)$	$13x^2-42x+9$ $\times 3)$	
1	$2x^3-8x^2+10x-12$ $2x^3-5x^2-4x+3$	$39x^2-126x+27$ $39x^2-182x+195$	-13
$-3x$	$(r_1(x))\ -3x^2+14x-15$ $-3x^2+9x$	$56x-168$ $\times \frac{1}{56})$	
5	$5x-15$ $5x-15$	$(r_2(x))\quad x-3$	
	0		

所以，$(f(x),\ g(x))=x-3$。

上面格式是比较方便的：先用带余除法求出$g(x)$除$f(x)$的余式$r_1(x)$，写在$f(x)$的下面；再把用$r_1(x)$除$g(x)$的竖式写在$g(x)$下面，其余式为$r_2(x)$。用$r_2(x)$除$r_1(x)$的竖式，写在$r_1(x)$的下面。若还不整除，再用同样形式往下排，直到求出最大公因式为止。由于商式已经改变，对我们已无甚价值，可以随时记在竖线外侧，仅供验算时用。

习 题 3.1

1．求下列多项式的最大公因式：

(1) $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-5x+2$,

$g(x)=x^4-2x^3+x^2-1$;

(2) $f(x)=2x^4+3x^3-10x+1$,

$g(x)=2x^3+5x^2+17x+21$;

(3) $f(x)=30x^4-59x^3+87x^2-37x+12$,

$g(x)=12x^4-28x^3+27x^2-2x-24$;

(4) $f(x)=x^4-10x^2+1$,

$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$;

(5) $f(x)=x^4+x^3+x^2-x-2$,

$g(x)=2x^3+(2+i)x^2+(-1+i)x-1$.

2．若$x+a=(x^2+kx+l,\ x^2+px+q)$，那末，必有$l-q=a(k-p)$。

3．求证：$x^4-1=(x^8-1,\ x^{12}-1)$。

4．若$f(x)\neq 0(x)$，$g(x)\neq 0(x)$，求证$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是公因式中次数最高者。

5．若多项式$f(x)$具有这样的性质：对于任一多项式$g(x)$，$f(x)=(f(x),\ g(x))$。求证$f(x)$是零次多项式。

6．若多项式$f(x)$具有这样的性质：对于任一多项式$g(x)$，$g(x)=(f(x),\ g(x))$。求证$f(x)$是$0(x)$。

7．整数环中的最大公因数概念与多项式环中的最大公因式概念十分相近，试对相应的定义及定理加以对照（参见书末附录）。

§3.2 最大公因式的判别方法

一个多项式是不是两已知多项式的最大公因式，直接利用定义判断，有时并不方便，下面介绍一个判别方法，它是多项式代数的重要定理，以下讨论假定在数域P上进行。

定理1 设$d(x)=(f(x), g(x))$，则存在多项式$u(x)$和$v(x)$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x). \qquad (1)$$

证明：若$f(x)=g(x)=0(x)$，则$d(x)=0(x)$，(1)式显然成立，否则，不妨设$g(x)\neq 0(x)$，参见上节定理1证明中的（1）式。由于$d(x)=cr_k(x)$，$(c\in P)$从倒数第二式可得

$$r_k(x)=r_{k-2}(x)-r_{k-1}(x)q_k(x).$$

令$u_1(x)=1$，$v_1(x)=-q_k(x)$，则

$$r_k(x)=r_{k-2}(x)u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x). \qquad (2)$$

再由倒数第三式，得

$$r_{k-1}(x)=r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x)q_{k-1}(x).$$

代入（2）式，得

$$\begin{aligned}r_k(x)&=r_{k-2}(x)u_1(x)+[r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)]\\&\quad\cdot v_1(x)\\&=r_{k-2}(x)\,[u_1(x)-q_{k-1}(x)v_1(x)]\\&\quad+r_{k-3}(x)v_1(x).\end{aligned}$$

令$v_2(x)=u_1(x)-q_{k-1}(x)v_1(x)$，$u_2(x)=v_1(x)$，故有

$$r_k(x)=r_{k-2}(x)v_2(x)+r_{k-3}(x)u_2(x).$$

同法逐步向上推进，最后得出等式（1）。定理得证。

注意 满足（1）式的$u(x)$和$v(x)$是不是唯一的呢？

设$f(x)=x^2-1$，$g(x)=(x+1)^2$，显然，$d(x)=x+1$．取

$$u(x)=-\frac{1}{2},\quad v(x)=\frac{1}{2},$$

不难看出，$x+1=(x^2-1)(-\frac{1}{2})+(x+1)^2\frac{1}{2}$。

但取 $$u(x)=-\frac{1}{2}-(x+1)^3=-x^3-3x^2-3x-\frac{3}{2},$$

$$v(x)=(x+1)(x^2-1)+\frac{1}{2}=x^3+x^2-x-\frac{1}{2},$$

同样有$u(x)f(x)+v(x)g(x)=x+1$成立。

一般地说，如果有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x),$$

则任取多项式$q(x)$，必有

$$[u(x)-q(x)g(x)]f(x)+[v(x)+q(x)f(x)]g(x)$$
$$=d(x)。$$

可见，满足（1）的$u(x)$和$v(x)$不是唯一的。

同时，定理1之逆定理并不正确．任取$v(x)$和$u(x)$，$u(x)f(x)+v(x)g(x)$一般不是$f(x)$和$g(x)$的最大公因式．如$f(x)=x^2-1$，$g(x)=(x+1)^2$，取$u(x)=x-1$，$v(x)=x+1$，易见

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=2x^3+2x^2+2x+2$$

连$f(x)$和$g(x)$的公因式都不是．但只要多项式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

是$f(x)$和$g(x)$的公因式，则必是最大公因式．这就是

定理2 若$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式，且存在多项式$u(x)$和$v(x)$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),\qquad (3)$$

则$d(x)=(f(x), g(x))$。

分析：最大公因式定义中的第一条已满足，只须证明$f(x)$和$g(x)$的任一公因式$h(x)$都是$d(x)$的因式。

证明：若$h(x)|f(x)$，$h(x)|g(x)$，则$h(x)|u(x)f(x)$，$h(x)|v(x)g(x)$，因而$h(x)|d(x)$。又因$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式，所以$d(x)=(f(x), g(x))$。

证毕。

综合定理1、2，可得：

推论1 多项式$f(x)$和$g(x)$的公因式$d(x)$为最大公因式的充要条件是存在多项式$u(x)$和$v(x)$，满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

求多项式$u(x)$和$v(x)$，可采取本节定理1证明过程中所用的方法。

例1 设$f(x)=x^4+2x^3+x^2+x+1$，$g(x)=x^3+x^2-x-1$，试求$(f(x), g(x))$和满足（1）式的$u(x)$及$v(x)$。

注意：这里仍用辗转相除法，不过与求最大公因式的情况不同，需要用到商式，因而不允许用数乘（除）被除式、除式或余式。

解：不难得出以下算式：

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x).$$

$(q_1(x))$	$(f(x))$	$(g(x))$	$(q_2(x))$
$x+1$	$x^4+2x^3+x^2+x+1$	x^3+x^2-x-1	$x-2$
	$x^4+x^3-x^2-x$	x^3+3x^2+2x	
	x^3+2x^2+2x+1	$-2x^2-3x-1$	
	x^3+x^2-x-1	$-2x^2-6x-4$	
$(q_3(x))$ $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$	$(r_1(x))\ x^2+3x+2$	$(r_2(x))\ 3x+3$	
	x^2+x		
	$2x+2$		
	$2x+2$		
	0		

所以，$3x+3=d(x)=r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)$

$$=g(x)-q_2(x)\ [f(x)-q_1(x)g(x)]$$

$$=[-q_2(x)]\ f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]\ g(x).$$

令 $u(x)=-q_2(x)=-x+2$,

$v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=1+(x+1)(x-2)=x^2-x-1$.

因而 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

例2 假设数a，b，c，d满足$ad-bc\neq 0$，求证$(af(x)+bg(x),\ cf(x)+dg(x))=(f(x),\ g(x))$.

分析：即证$f(x)$和$g(x)$的最大公因式也是$af(x)+bg(x)$与$cf(x)+dg(x)$的最大公因式。

证明：（1）设$d(x)=(f(x),g(x))$，则显然$d(x)|[af(x)+bg(x)]$，$d(x)|[cf(x)+dg(x)]$。故$d(x)$是$af(x)+bg(x)$和$cf(x)+dg(x)$的公因式。

（2）设$h(x)$是$af(x)+bg(x)$与$cf(x)+dg(x)$的任一公

因式，则必有

$$h(x)|[d(af(x)+bg(x))-b(cf(x)+dg(x))],$$

$h(x)|(ad-bc)f(x)$，但$ad-bc\neq 0$，故$h(x)$是$f(x)$的因式。同法可证$h(x)|g(x)$。所以，$h(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式，从而是$d(x)$的因式。

总括(1)、(2)，知

$d(x)=(af(x)+bg(x),\ cf(x)+dg(x))$。

例3 已知

$$f(x)=x^3+(t+1)x^2+2x+2u,$$

$$g(x)=x^3+tx^2+u$$

的最大公因式是二次多项式，求t与u。

分析：设$d(x)=(f(x),g(x))$，则$d(x)$整除$f(x)-g(x)$。而$f(x)-g(x)$和$d(x)$都是二次多项式，故$f(x)-g(x)$可看作$d(x)$。这是第一个解法。

还可用待定系数法。设$d(x)=x^2+ax+b$，用$d(x)$除$f(x)$和$g(x)$的商都是一次式，设为$x+c$和$x+d$。只须求a、b、c、d和t、u。

解：方法一。设$h(x)$是$f(x)-g(x)$除$f(x)$的商。$h(x)$必为一次式，设为$x+c$。则

$$[f(x)-g(x)](x+c)=f(x).$$

而$f(x)-g(x)=x^2+2x+u$，因而

$$(x^2+2x+u)(x+c)=x^3+(t+1)x^2+2x+2u. \qquad (4)$$

又因$f(x)-g(x)=x^2+2x+u$整除x^3+tx^2+u，设其商为$x+d$。因而

$$(x^2+2x+u)(x+d)=x^3+tx^2+u. \qquad (5)$$

(4)、(5)两式对比系数，可得方程组：

$$\begin{cases}2+c=1+t, & ①\\ 2c+u=2, & ②\\ uc=2u, & ③\\ d+2=t, & ④\\ 2d+u=0, & ⑤\\ ud=u. & ⑥\end{cases}$$

由第三个方程，得$u(c-2)=0$。即$u=0$，或$c=2$。若 $c_1=2$，得$u_1=-2$，$t_1=3$，$d_1=1$；若$u_2=0$，得$c_2=1$，$t_2=2$，$d_2=0$。因而共得两解：

(1)$f(x)=x^3+4x^2+2x-4$，$g(x)=x^3+3x^2-2$，$d(x)=x^2+2x-2$；

(2)$f(x)=x^3+3x^2+2x$，$g(x)=x^3+2x^2$，$d(x)=x^2+2x$。

方法二。设$d(x)=x^2+ax+b=(f(x),\ g(x))$，

$f(x)=d(x)(x+c)$，$g(x)=d(x)(x+d)$，得

$f(x)=(x^2+ax+b)(x+c)=x^3+(a+c)x^2+(ac+b)x+bc$。

$g(x)=(x^2+ax+b)(x+d)=x^3+(a+d)x^2+(ad+b)x+bd$。

对比$f(x)$和$g(x)$的系数，得方程组：

$$\begin{cases}1+t=a+c, & ①\\ 2=ac+b, & ②\\ 2u=bc, & ③\\ t=a+d, & ④\\ 0=ad+b, & ⑤\\ u=bd. & ⑥\end{cases}$$

把⑥代入③，得$2bd=bc$，则有$b(2d-c)=0$。

(1)若$b_1=0$，由⑥，$u_1=bd=0$；由⑤，$ad=-b$，故

$ad=0$。但根据②，$ac=2$，故$a\neq 0$。所以$d_1=0$；又由④，$t=a$，①化为$1+a=a+c$，得$c_1=1$；由$ac=2$，知$a_1=2$，$t_1=a_1=2$。即

$$f(x)=x^3+3x^2+2x=(x^2+2x)(x+1),$$

$$g(x)=x^3+2x^2=(x^2+2x)x.$$

(2)若$2d-c=0$，则$c=2d$。由于①，$a+2d=1+t$。又因④，$a+d=t$，相减得$d_2=1$，因而$c_2=2$。由③式$u=b$，⑤式化为$a+b=0$，$a=-b$。再由②式，得$2a+b=2$，从而$a_2=2$，$b_2=-2$，$t_2=3$，$u_2=-2$。即

$$f(x)=x^3+4x^2+2x-4=(x^2+2x-2)(x+2),$$

$$g(x)=x^3+3x^2-2=(x^2+2x-2)(x+1).$$

习　题　3.2

1. 证明：$h(x)(f(x),g(x))=(h(x)f(x),h(x)g(x))$。

2. 证明：$(f(x),(g(x),h(x)))=((f(x),g(x)),h(x))$。

3. 求满足$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$的$u(x)$和$v(x)$。已知：

(1)　$f(x)=x^3+x+2$，$g(x)=x^3-x$；

(2)　$f(x)=x^4-x^3-5x^2-x-6$，$g(x)=x^4-1$。

4. 用最大公因式判别定理证明：

$(f(x),f(x)\pm g(x))=(f(x),g(x))$。

§3.3　多项式的互素

一、什么是互素？

在整数环中，两个整数a与b若除了± 1外，别无其他公因

数，则称之为互素。如12和35就是一对互素的整数，记为 $(12,35)=1$（见附录）。

在多项式环中，也同样有互素的概念。

如 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=x^2-4$。尽管每个多项式都有非当然因式，但它们除了非零常数外，没有其他公因式。

定义1 数域 P 上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，若除了非零常数外无其他公因式，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素。

显然，$f(x)$ 和 $g(x)$ 互素当且仅当零次多项式是其最大公因式。所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素也记为 $(f(x), g(x))=1$（读作 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素）。

二、性 质

两个多项式互素与否怎样进行判断呢？

定理1 $(f(x),g(x))=1$ 的充要条件是存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

证明留给读者自己去完成（利用上节推论1）。

以下是互素的简单性质。

性质1 零次多项式（即非零常数）与任何多项式互素。

证明： 设 c 为零次多项式，$f(x)$ 为任一多项式。因为 $c\mid f(x)$，由§3.1性质3，$c=(c, f(x))$。

性质2 设 $f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$，$d(x)\neq 0(x)$。则 $d(x)=(f(x), g(x))$ 的充要条件是 $(f_1(x), g_1(x))=1$。

证明： 必要性。

假定 $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 不互素，那末一定存在非零次的公因

式$h(x)$。因而$h(x)d(x)$也是$f(x)$与$g(x)$的公因式。由于$d(x)=(f(x),\ g(x))$，故

$$h(x)d(x)\mid d(x),$$

这是不可能的。所以$(f_1(x),\ g_1(x))=1$。

充分性。

若$(f(x),g(x))=h(x)$。由于$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式，因而$d(x)\mid h(x)$。再设$h(x)=k(x)d(x)$。于是$k(x)d(x)\mid f_1(x)d(x)$，因为$d(x)\neq 0(x)$，故有$k(x)\mid f_1(x)$；同理$k(x)\mid g_1(x)$.所以$k(x)$是$f_1(x)$和$g_1(x)$的公因式。但$f_1(x)$和$g_1(x)$互素，$k(x)$只能是零次多项式。假定$k(x)=c\neq 0$，则$d(x)=\frac{1}{c}h(x)$也是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

注意：条件$d(x)\neq 0(x)$不能去掉。若$d(x)=0(x)$，必有$f(x)=g(x)=0(x)$.任取$f_1(x)$和$g_1(x)$，都有$f(x)=0(x)=0(x)f_1(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=0(x)=0(x)g_1(x)=d(x)\cdot g_1(x)$。$f_1(x)$和$g_1(x)$可以不互素。

性质3 若$f(x)\mid g(x)h(x)$，但$(f(x),\ h(x))=1$，则$f(x)\mid g(x)$。

证明：根据定理1，由$(f(x),\ h(x))=1$，可知存在$u(x)$和$v(x)$，使

$$f(x)u(x)+h(x)v(x)=1.$$

两端同乘$g(x)$，得

$$f(x)[g(x)u(x)]+[g(x)h(x)]v(x)=g(x).$$

由于$f(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid g(x)h(x)$，得$f(x)\mid g(x)$。

注意：一多项式整除两个多项式之积，如果没有其他条

件，一般不一定整除其中之一。如 $(x^2-1)\mid[(x+1)^2\cdot(x-1)^2]$，但 $(x^2-1)\nmid(x+1)^2$，$(x^2-1)\nmid(x-1)^2$。

性质4 若 $(f(x),h(x))=1$，$(g(x),h(x))=1$，则 $(f(x)g(x),h(x))=1$。

证明：由于 $f(x)$ 和 $h(x)$ 互素，故存在 $u(x)$ 和 $v(x)$，满足 $f(x)u(x)+h(x)v(x)=1$。两端同乘 $g(x)$，得

$$[f(x)g(x)]u(x)+h(x)[v(x)g(x)]=g(x).$$

显然，若有多项式 $k(x)$ 整除 $f(x)g(x)$ 和 $h(x)$，则 $k(x)\mid g(x)$。即 $k(x)$ 是 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，$k(x)$ 必是零次多项式。所以，$f(x)g(x)$ 和 $h(x)$ 的公因式都是零次多项式，故

$$(f(x)g(x),h(x))=1.$$

性质5 若 $h(x)\mid f(x)$，$g(x)\mid f(x)$，且 $(h(x),g(x))=1$，则 $h(x)g(x)\mid f(x)$。

证明：由于 $h(x)\mid f(x)$，故存在 $k(x)$，使 $f(x)=h(x)\cdot k(x)$。因为 $g(x)\mid f(x)$，$(h(x),g(x))=1$，根据性质3，$g(x)\mid k(x)$，即得

$$h(x)g(x)\mid h(x)k(x),$$

或

$$h(x)g(x)\mid f(x).$$

注意：若没有互素的条件，则性质5是不成立的。如 $h(x)=x+1$，$g(x)=x^2-1$，$f(x)=(x+1)(x-1)^2$，则 $h(x)$ 与 $g(x)$ 都整除 $f(x)$，但 $h(x)g(x)$ 却不能整除 $f(x)$。

定理1是多项式互素的重要判别方法。$u(x)$ 和 $v(x)$ 不是唯一的，但是若加上次数的限制，就会保证 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的唯一性。

定理2 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 次数都 $\geqslant 1$，则存在唯一的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$，它们或者是 $0(x)$，或者

次数分别低于$g(x)$和$f(x)$的次数，满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1. \tag{1}$$

证明：由于$(f(x), g(x))=1$，根据定理1，存在$u_1(x)$和$v_1(x)$，使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1. \tag{2}$$

用$g(x)$来除$u_1(x)$，用$f(x)$来除$v_1(x)$，得商式和余式，即有以下两式：

$$u_1(x)=q_1(x)g(x)+u(x), \tag{3}$$

$$v_1(x)=q_2(x)f(x)+v(x). \tag{4}$$

其中$u(x)$或者是$0(x)$，或者次数低于$g(x)$的次数，$v(x)$或者是$0(x)$，或者次数低于$f(x)$的次数。将(3)、(4)两式代入(2)式，得

$$[q_1(x)g(x)+u(x)]f(x)+[q_2(x)f(x)+v(x)]g(x)=1.$$

$$1-u(x)f(x)-v(x)g(x)=[q_1(x)+q_2(x)]f(x)g(x). \tag{5}$$

若$q_1(x)+q_2(x)\neq 0(x)$，(5)式右端次数应不低于$f(x)g(x)$的次数，但(5)式左端的次数显然低于$f(x)g(x)$的次数，出现矛盾。故$q_1(x)+q_2(x)=0(x)$，(5)式左端也是$0(x)$，因而(1)式成立。

下面证明满足条件的$u(x)$与$v(x)$是唯一的。

事实上，若$\bar{u}(x)$和$\bar{v}(x)$也满足条件，即

$$\bar{u}(x)f(x)+\bar{v}(x)g(x)=1. \tag{6}$$

由(1)、(6)两式得

$$\bar{u}(x)f(x)+\bar{v}(x)g(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

$[u(x)-\bar{u}(x)]f(x)=[\bar{v}(x)-v(x)]g(x)$。

由于$f(x)|[\bar{v}(x)-v(x)]g(x)$，$(f(x), g(x))=1$，根据性质3，$f(x)|[\bar{v}(x)-v(x)]$。

若$\bar{v}(x)-v(x)\neq 0(x)$，其次数低于$f(x)$的次数，得到$f(x)\nmid[\bar{v}(x)-v(x)]$矛盾。因而必有$\bar{v}(x)-v(x)=0(x)$，或$\bar{v}(x)=v(x)$。同理可证$\bar{u}(x)=u(x)$。

习 题 3.3

1. 证明：$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$与$g(x)=x^3+x^2+x+1$互素。

2. 证明：若两个多项式的差为零次多项式，则这两个多项式互素。

3. 若$(f(x), g(x))=1$，则$(f(x), f(x)+g(x))=1$，$(f(x), f(x)-g(x))=1$。试证明之。

4. 若$(f(x), g(x))=1$，则$(f(x)+g(x), f(x)-g(x))=1$，试证明之。

5. 试证若$(f(x), g(x))=1$，$h(x)$为任一多项式，则$(f(x)h(x), g(x)h(x))=h(x)$。

6. 试证若$(f(x), g(x))=1$，则$(f(x^2), g(x^2))=1$。

（注意：$f(x^2)$就是用x^2代$f(x)$中的x所得的多项式。如$f(x)=3x^3+x+1$，则$f(x^2)=3(x^2)^3+x^2-1$
$=3x^6+x^2-1$）

7. 若$(f(x), g(x))=1$，则$(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。试证明之。

8. 证明：$(f_n(x), f_{n+1}(x)) = 1$，其中

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

9. 本节定义和定理在整数环中所对应的定义和定理是什么？试加以叙述。

10. 证明本节定理 1 .

11. 若$f(x)$的某倍式与$g(x)$的某倍式互素，求证$f(x)$与$g(x)$互素。

§3.4 多个多项式的最大公因式

一、概念与求法

最大公因式的概念可以推广到多个多项式中来。

定义1 设$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)(s\geqslant 2)$是数域P上的多项式。若有$d(x)\in P[x]$满足

（1） $d(x)|f_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, s$；

（2） $d(x)$是各$f_i(x)$公因式的倍式，即若$h(x)\in P[x]$，$h(x)|f_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, s$，则$h(x)|d(x)$；

那末，就称$d(x)$是$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最大公因式，记为$d(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x))$.

以下我们将建立多个多项式的最大公因式与两个多项式的最大公因式之间的关系。由此，多个多项式最大公因式的性质（如存在性及唯一性）和求法就可以一并得到解决。

定理1 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最大公因式一定存在，且除一个非零常数因子外，是唯一的。设

$d(x)=((\cdots((f_1(x), f_2(x)), f_3(x)), \cdots), f_s(x))$，

则$d(x)$是$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最大公因式。

分析：定理的结论说，$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最大公因式可以这样求得：先求$f_1(x)$，$f_2(x)$的最大公因式$d_1(x)$，再求$d_1(x)$与$f_3(x)$的最大公因式$d_2(x)$，一直作下去，最后求出$d_{s-2}(x)$与$f_s(x)$的最大公因式，这就是$d(x)$。

证明：首先，$d(x)$是各$f_i(x)$的公因式。

事实上，由于$d(x)$是$d_{s-2}(x)$和$f_s(x)$的最大公因式，$d(x)|f_s(x)$，$d(x)|d_{s-2}(x)$。而$d_{s-2}(x)$是$f_{s-1}(x)$和$d_{s-3}(x)$的最大公因式，由整除的传递性，必有$d(x)|f_{s-1}(x)$。这样倒推过去，知$d(x)$整除各$f_i(x)$。

其次，$d(x)$是各$f_i(x)$公因式的倍式。

事实上，设$h(x)$是各$f_i(x)$的任一公因式，则因$h(x)|f_1(x)$，$h(x)|f_2(x)$，得$h(x)|d_1(x)$。又由$h(x)|f_3(x)$，故$h(x)$整除$d_1(x)$和$f_3(x)$的最大公因式$d_2(x)$。如此下推，最后由$h(x)|d_{s-2}(x)$和$h(x)|f_s(x)$，得出$h(x)|d(x)$。

因而，$d(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x))$。

下面证明：各$f_i(x)$的最大公因式在不计非零常数因子的意义下是唯一的。

设$\bar{d}(x)$也是$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最大公因式。由最大公因式的定义1，推出$\bar{d}(x)$与$d(x)$互相整除。由§2.3性质4，$d(x)$和$\bar{d}(x)$只相差一个非零常数因子。

证毕。

应用定理1，作以下例题：

例1 求$f(x)=x^2+2x+1$，$g(x)=x^2-1$，$h(x)=x^3+1$的最大公因式。

解：先求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式：

$$(x^2+2x+1,\ x^2-1)=x+1=d_1(x).$$

而 $(d_1(x),\ h(x))=(x+1, x^3+1)=x+1,$

故 $(f(x),\ g(x),\ h(x))=x+1.$

例2 求$f(x)=x^3+x^2+x+1$，$g(x)=x^2+x+1$，$h(x)=3x^4-2x^3+5x^2-4x+4$的最大公因式。

解：易见$f(x)$和$g(x)$互素。事实上，有

$$1\cdot f(x)+(-x)g(x)=1,$$

由互素判别定理，$(f(x),\ g(x))=1$。

而$(1,\ h(x))=1$，故$(f(x),\ g(x),\ h(x))=1$。

二、最大公因式的判别

两个多项式最大公因式的判别法，可以推广到多个多项式的情况。

定理2 假设$d(x)$是$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的公因式。则$d(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x))$的充要条件是存在$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_s(x)$，满足

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=d(x). \quad (1)$$

证明：充分性。设$h(x)$是$f_1(x)$，…，$f_s(x)$的任一公因式，由(1)，$h(x)$整除$d(x)$，又因$d(x)$是各$f_i(x)$的公因式，故$d(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x))$。

必要性。设$d(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x))$。由本节定理1，$d(x)=((\cdots((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),\cdots),f_s(x))$。设$d_1(x)=(f_1(x),\ f_2(x))$，则存在$w_1(x)$和$w_2(x)$，满足

$$d_1(x)=w_1(x)f_1(x)+w_2(x)f_2(x).$$

设$d_2(x)=(d_1(x),\ f_3(x))$，则存在$v_1(x)$和$w_3(x)$，满

足$d_2(x)=v_1(x)d_1(x)+w_3(x)f_3(x)$

$$=v_1(x)[w_1(x)f_1(x)+w_2(x)f_2(x)]+w_3(x)f_3(x)$$

$$=[w_1(x)v_1(x)]f_1(x)+[v_1(x)w_2(x)]f_2(x)$$

$$+w_3(x)f_3(x)。$$

这一过程一直进行到底，最后得到s个多项式$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_s(x)$，满足

$$d(x)=u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)。$$

三、两两互素与整体互素

多个多项式之间，存在着两种互素。

定义2 多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)(s\geqslant 2)$中，若任意两个多项式都互素，则称这些多项式两两互素。

还有一种互素：

定义3 若多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)(s\geqslant 2)$的最大公因式是零次多项式，则称$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$整体互素。

显然，两两互素一定保证整体互素。反之，整体互素却不能保证两两互素。如$f_1(x)=x^2-1$，$f_2(x)=(x+1)^2$，$f_3(x)=(x-1)^2$整体互素，但不两两互素，$(f_1(x),f_2(x))=x+1$。

由定理2，可得整体互素的判别法：

定理3 多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$整体互素的充要条件是存在$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_s(x)$，满足

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=1。$$

证明留给读者去完成。

习 题 3.4

1.设$f(x)=x^2-x+1$，$g(x)=3x^2-2x^2+x+2$，$h(x)=x^2+2x-1$，试求$(f(x),\ g(x),\ h(x))$。

2.证明本节定理3。

3.证明：若$(f_1(x),\ f_2(x))=1$，则

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x))=1.$$

这里$s\geqslant 2$，$f_3(x)$，…，$f_s(x)$是任意多项式。

4.证明：

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x))=((f_1(x),f_2(x)),\ (f_3(x),\ f_4(x))).$$

5.证明：

$$g(x)(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,f_s(x))=(g(x)f_1(x),g(x)\cdot f_2(x),\cdots,\ g(x)f_s(x)).$$

6.本节定义和定理在整数环中所对应的定义和定理是什么？试加以叙述。

7.证明：多项式x^n-1，$x^{n-1}-1$，$x^{n-2}-1$，…，$x-1$，$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$整体互素。

8.若$f_1(x)$，$f_2(x)$，…$f_n(x)$两两互素，求证：$f_1(x)f_2(x)$，$f_2(x)f_3(x)$，…，$f_{n-1}(x)f_n(x)$，$f_n(x)f_1(x)$整体互素。这里$n\geqslant 3$。

9.求证：

$$(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_s(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,\ f_s(x))$$
$$=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x)).$$

10.设$d_{ij}(x)=(f_i(x),\ f_j(x))$，$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ s$，求证：所有$d_{ij}(x)$的最大公因式是所有$f_i(x)$的最大公因

式。即

$$(d_{11},\cdots,d_{1s},\cdots,d_{s1},\cdots,d_{ss})=(f_1,f_2,\cdots,f_s).$$

§3.5 最小公倍式

一、什么是最小公倍式？

设$f(x)$和$g(x)$是数域P上的两个多项式。若$h(x)\in P[x]$是$f(x)$的倍式，又是$g(x)$的倍式，那么就称$h(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公倍式。

显然，任意两个多项式$f(x)$和$g(x)$的公倍式，总是存在的，因为任取$k(x)\in P[x]$，那末

$$k(x)f(x)g(x) \tag{1}$$

是$f(x)$与$g(x)$的公倍式，称为$f(x)$与$g(x)$的当然公倍式。当$k(x)=0(x)$及$k(x)=1$时，(1)形的多项式就是$0(x)$及$f(x)\cdot g(x)$，所以$0(x)$及$f(x)g(x)$都是其当然公倍式。

两个多项式的公倍式有无穷多个，其中有一类特别重要，这就是最小公倍式。

定义1 设$f(x)$，$g(x)\in P[x]$。若有$m(x)\in P[x]$，满足：

(1) $m(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公倍式；

(2) $m(x)$整除$f(x)$与$g(x)$的一切公倍式。则称$m(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式，记为$m(x)=[f(x),g(x)]$。

注意：定义中(1)说明最小公倍式首先是公倍式；(2)体现“最小性”。

如 $f(x)=(x+1)(x-1)^2$，$g(x)=(x-1)(x+2)^3$，则显然$(x+1)^3(x-1)^2(x+2)^4$，$(x+1)^4(x-1)^4(x+2)^5$，$(x+1)^2(x-1)^2(x+2)^3$，$(x+1)(x-1)^3(x+2)^4$，

$(x+1)(x-1)^2(x+2)^3$等都是$f(x)$与$g(x)$的公倍式，但所有公倍式都被$(x+1)(x-1)^2(x+2)^3$整除，因此，$(x+1)(x-1)^2(x+2)^3=[f(x),\ g(x)]$。

由最小公倍式的定义，可直接推出以下性质。

性质1 设$m(x)$与$l(x)$都是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式，则$m(x)$与$l(x)$只能相差一个非零常数因子。

证明： $l(x)$是公倍式，$m(x)$是最小公倍式，故$m(x)|l(x)$。同理，$l(x)|m(x)$。由§2.3性质4，$l(x)$与$m(x)$只能相差一个非零常数因子。

性质2 若$m(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式，$c\neq 0$，则$c\cdot m(x)$也是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式。

证明： 首先，$c\cdot m(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公倍式；此外，若$k(x)$是$f(x)$与$g(x)$的任一公倍式，则由于$m(x)|k(x)$，必有$c\cdot m(x)|k(x)$，因而$c\cdot m(x)$是最小公倍式。

推论1 设$m(x)=[f(x),\ g(x)]$，则$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式是且仅是$c\cdot m(x)(c\neq 0)$形的多项式。

性质3 若$f(x)|g(x)$，则$[f(x),\ g(x)]=g(x)$。

性质4 若$(f(x),\ g(x))=1$，则

$$[f(x),g(x)]=f(x)g(x)。$$

二、最小公倍式的求法

刚才，我们证明了最小公倍式的唯一性，这里的唯一性与最大公因式有相同的意义。然而还没有证明最小公倍式的存在性，也没有指出最小公倍式的求法。下面，我们利用多项式的整除性，找出最小公倍式与最大公因式之间的关系，借助最大公因式的已知性质，极易解决最小公倍式的相应

问题。

定理1 设$f(x)$和$g(x)$是数域P上的非零多项式，$d(x)$和$m(x)$分别是其最大公因式与最小公倍式，则$d(x)m(x)$与$f(x)g(x)$相差一个非零常数因子，即存在$c\in P$，$c\neq 0$，使

$$d(x)m(x)=cf(x)g(x). \tag{2}$$

证明：设 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，并令$l(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)$。下面证明$l(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式。

首先，显然$l(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公倍式。

其次，设$k(x)$是$f(x)$与$g(x)$的任一公倍式，只须证明$l(x)|k(x)$。

事实上，由于$d(x)|k(x)$，设$k(x)=k_1(x)d(x)$，又因$f(x)|k(x)$，故$f_1(x)d(x)|k_1(x)d(x)$，$f_1(x)|k_1(x)$。同理，$g_1(x)|k_1(x)$。由于$d(x)=(f(x),g(x))$，根据§3.3性质2，$(f_1(x),g_1(x))=1$，故$f_1(x)g_1(x)|k_1(x)$，进而有$f_1(x)g_1(x)\cdot d(x)|k_1(x)d(x)$或$l(x)|k(x)$。

总之，$l(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式。又因$m(x)$也是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式，所以存在$c\in P$，$c\neq 0$，满足

$$m(x)=cl(x)=cd(x)f_1(x)g_1(x)$$

或

$$d(x)m(x)=c[d(x)f_1(x)][d(x)g_1(x)]$$

$$=cf(x)g(x).$$

证毕。

因此，对于非零多项式$f(x)$和$g(x)$，由最大公因式$d(x)$，可得出最小公倍式$\dfrac{f(x)g(x)}{d(x)}$，因而最小公倍式是存在的；

反之，由最小公倍式$m(x)$，也可得出最大公因式$\frac{f(x)g(x)}{m(x)}$。注

若$f(x)$或$g(x)$至少有一个是$0(x)$，根据性质3，$[f(x), g(x)]=0(x)$。

总括定理1与推论1，可以得出如下结论：对于任意的多项式$f(x)$与$g(x)$，其最小公倍式总存在，且除非零常数因子外，是唯一的。

例1 设 $f(x)=x^5+2x^4+4x^3+x^2+3x-1$,

$g(x)=x^4+3x^2+2$,

求$[f(x), g(x)]$。

解： 由§3.1例1知

$$(f(x), g(x))=x^2+1.$$

再由定理1，$[f(x), g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}$

$=x^7+2x^6+6x^5+5x^4+11x^3+x^2+6x-2$。

三、最小公倍式的判别

定理2 设$m(x)$是非零多项式$f(x)$和$g(x)$的公倍式，则$m(x)$为其最小公倍式的充要条件是

$$\left(\frac{m(x)}{f(x)}, \frac{m(x)}{g(x)}\right)=1. \qquad (3)$$

证明：充分性。

若$m(x)$不是$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式，而$l(x)$是其最小公倍式，则存在高于零次的多项式$l_1(x)$，使$m(x)=l_1(x)\cdot l(x)$。因而

注 若$g(x)|f(x)$，约定用$\frac{f(x)}{g(x)}$来记以$g(x)$除$f(x)$的商多项式.

$$\frac{m(x)}{f(x)}=l_1(x)\frac{l(x)}{f(x)},$$

$$\frac{m(x)}{g(x)}=l_1(x)\frac{l(x)}{g(x)}.$$

其中$\frac{l(x)}{f(x)}$与$\frac{l(x)}{g(x)}$都是多项式。

这就是说，$l_1(x)$是$\frac{m(x)}{f(x)}$与$\frac{m(x)}{g(x)}$的非当然公因式，

与$\left(\frac{m(x)}{f(x)}, \frac{m(x)}{g(x)}\right)=1$矛盾。

因此，$m(x)=[f(x), g(x)]$。

必要性。

由于$m(x)=[f(x), g(x)]$，据本节定理1，

$\frac{f(x)g(x)}{m(x)}=(f(x), g(x))$。根据最大公因式判别定理，存在$u(x)$和$v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\frac{f(x)g(x)}{m(x)}. \qquad (4)$$

设$m(x)=m_1(x)f(x)$，$m(x)=m_2(x)g(x)$。（4）式两端同乘$m(x)$后，可化为

$$u(x)f(x)m(x)+v(x)g(x)m(x)=f(x)g(x),$$

$$u(x)f(x)g(x)m_2(x)+v(x)f(x)g(x)m_1(x)=f(x)g(x).$$

上式两端约去$f(x)g(x)$，得

$$u(x)m_2(x)+v(x)m_1(x)=1.$$

因而$(m_1(x), m_2(x))=1$。定理得证。

推论2 非零多项式$f(x)$和$g(x)$互素的充要条件是$f(x)\cdot g(x)=[f(x), g(x)]$。

证明：由性质4得必要性。

反之，若上式成立，由定理2，$\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=g(x)$与$\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=f(x)$互素。

例2 设$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$是三个非零多项式，证明$[f(x),\ g(x)]h(x)=[f(x)h(x),\ g(x)h(x)]$。

证明： 设$[f(x),\ g(x)]=m(x)$。

首先，$m(x)h(x)$显然是$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的公倍式。此外，任取$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的公倍式$l(x)$，则有$m_1(x)$和$m_2(x)$，使

$$l(x)=m_1(x)f(x)h(x)=m_2(x)g(x)h(x)。$$

显然，$m_1(x)f(x)=m_2(x)g(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公倍式。因而$m(x)|m_1(x)f(x)$，$m(x)h(x)$整除$m_1(x)f(x)h(x)$，即$m(x)h(x)|l(x)$。

所以，$m(x)h(x)=[f(x),\ g(x)]h(x)$是$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的最小公倍式。

习 题 3.5

1. 求多项式$f(x)=x^2+1$与多项式$g(x)=x^2+2$的最小公倍式。

2. 求多项式$f(x)=2x^2+3x+1$与多项式$g(x)=x^3+1$的最小公倍式。

3. 求多项式$f(x)=x^4-1$和多项式$g(x)=x^6-1$的最小公倍式。

4. 证明本节推论1、性质3和性质4。

5.证明：$[f(x), 0(x)]=0(x)$，$[0(x), 0(x)]=0(x)$。

6.若$f(x)$与$g(x)$皆不是$0(x)$，则$[f(x), g(x)]\neq 0(x)$。试证明之。

7.问$f(x)$和$g(x)$满足什么条件时，$(f(x), g(x))=[f(x), g(x)]$？

8.本节定义和定理在整数环中所对应的定义和定理是什么？试加以叙述。

9.设$f(x)\neq 0(x)$，$g(x)\neq 0(x)$，证明$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式是公倍式中次数最低者。

10.设$f(x)$是零次多项式，证明：$[f(x), g(x)]=g(x)$。其中$g(x)$为任意多项式。

11.设多项式$f(x)$具有如下性质：对于任何多项式$g(x)$，都有$[f(x), g(x)]=g(x)$。求证$f(x)$是零次多项式。

12.设多项式$f(x)$具有如下性质：对于任何多项式$g(x)$，都有$[f(x), g(x)]=f(x)$。求证$f(x)=0(x)$。

本 章 提 要

1.最大公因式

(1) 定义：$d(x)=(f(x), g(x))$意即：

① $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$；

② 若$h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，则$h(x)\mid d(x)$.

(2) 存在性与唯一性：任意两个多项式的最大公因式总存在，且除非零常数因子外，是唯一的.

(3) 求法：辗转相除法.

(4) 判别方法：

① $d(x)=(f(x), g(x))$当且仅当$d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid$

$g(x)$，且存在$u(x)$和$v(x)$，使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$.

② $d(x)=(f(x),\ g(x))$当且仅当$d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，且$\left(\frac{f(x)}{d(x)},\ \frac{g(x)}{d(x)}\right)=1\ (d(x)\neq 0(x))$.

2.两多项式互素

(1) 定义：$f(x)$与$g(x)$互素是指$f(x)$和$g(x)$除零次公因式(当然公因式)之外没有其他公因式.记为$(f(x),\ g(x))=1$.

(2) 判别方法：$(f(x),\ g(x))=1$当且仅当存在$u(x)$和$v(x)$，使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

3.最小公倍式

(1) 定义：$m(x)=[f(x),\ g(x)]$意即：

① $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$；

② 若$f(x)\mid h(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则$m(x)\mid h(x)$.

(2) 与最大公因式的关系：若$f(x)\neq 0(x)$，$g(x)\neq 0(x)$，则$m(x)(\neq 0(x))$为$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式的充要条件是$\frac{f(x)g(x)}{m(x)}$为$f(x)$与$g(x)$的最大公因式.

(3) 存在性与唯一性：任意两个多项式的最小公倍式总存在，且除非零常数因子外，是唯一的.

(4) 判别方法：$m(x)$是非零多项式$f(x)$和$g(x)$的最小公倍式的充要条件为

$$f(x)\mid m(x),\ g(x)\mid m(x),\ 且\left(\frac{m(x)}{f(x)},\ \frac{m(x)}{g(x)}\right)=1.$$

4.多个多项式的最大公因式(式中$s\geqslant 2$)

(1) 定义：$d(x)=(f_1(x),\ \cdots,\ f_s(x))$意即：

① $d(x)\mid f_1(x)$，…，$d(x)\mid f_s(x)$；

② 若$h(x)\mid f_1(x)$，…，$h(x)\mid f_s(x)$，则$h(x)\mid d(x)$.

(2) 存在性与唯一性：同1中(2).

(3) 求法：

$$d(x)=((\cdots((f_1(x),\ f_2(x)),\ f_3(x)),\ \cdots),\ f_s(x)).$$

(4) 互素：

① 整体互素指$(f_1(x),\ \cdots,\ f_s(x))=1$；

② 两两互素指任意两个不同的多项式互素.

两两互素保证整体互素，反之不然；

(3) 整体互素的判别方法：存在$u_1(x)$，…，$u_s(x)$满足

$$u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=1.$$

复 习 题 三

1. 试求多项式

$$f(x)=4x^3-17x^2+11x+5,$$

$$g(x)=2x^3-3x^2-11x-3$$

的最大公因式.

2. 试求多项式

$$f(x)=x^4-x^3-3x^2+x+2,$$

$$g(x)=2x^4+3x^3-x^2-3x-1$$

的最大公因式.

3. 证明：多项式$f(x)=x^2+x+2$与多项式$g(x)=x^2-x$互素，并求$u(x)$和$v(x)$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

4. 证明：$x+k(k\neq0)$为多项式$f(x)=x^3+ax+b$和$g(x)=x^3+cx+d$最大公因式的当且仅当$d-b=k(c-a)b\neq d$，$k^3+ak=b$.

5. 求多项式

$$f(x)=3x^3-22x^2+30x+27,$$

$$g(x)=x^2-8x+15$$

的最大公因式$d(x)$，并求满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

的$u(x)$和$v(x)$.

6. 求上题中$f(x)$与$g(x)$的最小公倍式.

7. 设$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$，其中$d(x)=(f(x), g(x))\neq 0(x)$. 求$u(x)$与$v(x)$的最大公因式和最小公倍式.

8. 试求多项式

$$f(x)=x^3-1, \qquad g(x)=x^3+2x^2+2x+1$$

的最大公因式和最小公倍式，并写出$f(x)$和$g(x)$的首项系数为1的五次公倍式

9. 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

其中$a_n\neq 0$，求证$f(x)$和$g(x)$互素.

10. 证明：

$$(f_1(x), g_1(x))(f_2(x), g_2(x))$$
$$=(f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x), g_1(x)f_2(x), g_1(x)g_2(x)).$$

11. 已知多项式

$$f(x)=4x^4+12x^3-x^2-15x,$$
$$g(x)=6x^4+13x^3-4x^2-15x$$

有公根，试求两多项式的所有根.

12. 试确定数r，使多项式

$$f(x)=x^2+rx+1, \quad g(x)=x^3-2x^2+2x-1$$

(1)有两个公根；(2)有一个公根.

13. 试求数a和b，使多项式

$$f(x)=x^3+ax^2+11x+6, \quad g(x)=x^3+bx^2+14x+8$$

有形如x^2+px+q的公因式.

14. 若$f_i(x)\neq 0(x)$，$i=1, 2, \cdots, s$，求证：其最大公因式是公因式中次数最高者；其最小公倍式是公倍式中次数最低者.

注意：多个多项式的最小公倍式仿照两个多项式的情况定义.

15.三个多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$两两互素的充要条件是存在多项式$u_1(x)$，$u_2(x)$，$u_3(x)$，满足

$$u_3(x)f_1(x)f_2(x)+u_2(x)f_1(x)f_3(x)+u_1(x)f_2(x)f_3(x)=1.$$

试加以证明，并推广到n个多项式的情况。

第四章　一元多项式的分解

本章介绍多项式的因式分解理论，同时讲述不可约多项式、重因式以及有理数域上不可约多项式等有关内容。

§4.1　不可约多项式

一、什么是不可约多项式?

我们知道，有一种自然数只有两个不同的自然数因数：1和其本身，这种数叫做素数。如2，3，5，7等都是素数。在多项式中也有类似的情况。如$x+1$，它的因式只有两类：一类是$x+1$与任意零次多项式的乘积；另一类是任意零次多项式。这两种因式都属于当然因式。这就是说，$x+1$除了当然因式外，没有别的因式。而多项式x^2-1就不同了，它除了当然因式外，还有因式$x+1$与$x-1$。

定义1　设$f(x)$是数域P上次数$\geqslant 1$的多项式。若$f(x)$在$P[x]$中有非当然因式，则称$f(x)$是数域P上的可约多项式。若$f(x)$在$P[x]$中没有非当然因式，则称$f(x)$为数域P上的不可约多项式。

注意：$0(x)$和零次多项式既不能叫做可约多项式，也不能叫做不可约多项式。正如1和0既不叫做素数，也不叫做合数一样。

多项式的不可约性与数域P有密切关系，如多项式$f(x)$

$=x^2-2$在看作有理数域上的多项式时，它是不可约多项式，若看作实数域上的多项式时，则是一个可约多项式，因为

$$f(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

这里，$x+\sqrt{2}$ 与 $x-\sqrt{2}$ 都是实数域上的多项式。进一步看，若一个多项式在一个较大数域上是不可约的，则它看作是较小数域上的多项式时，也一定是不可约的。但在一个较小数域上的不可约多项式，在较大数域上却可能是可约的，上例说明了这点。

另外，由不可约多项式的定义，任何一次多项式都是不可约多项式，不可约多项式与任意零次多项式之积还是不可约的。

二、不可约多项式的性质

性质1 设$p(x)$是数域P上的不可约多项式，$f(x)$是数域P上的任一多项式，则或者$p(x)|f(x)$，或者$(p(x),f(x))=1$。

注意：对于可约多项式，这个性质不成立。如$(x^2-1)\nmid(x+1)^2$，但x^2-1与$(x+1)^2$不互素，因为$(x^2-1,(x+1)^2)=x+1$。

证明：若$p(x)\nmid f(x)$，令$d(x)=(p(x),f(x))$，则$d(x)|p(x)$.由于$p(x)$是不可约多项式，因而$d(x)$只能是$p(x)$的当然因式，即$d(x)=cp(x)$或$d(x)=c$，其中c为某非零常数。$p(x)$既然不能整除$f(x)$，自然$cp(x)\nmid f(x)$,所以$cp(x)$不可能是$p(x)$和$f(x)$的公因式，而只能有$d(x)=c$，即$p(x)$和$f(x)$的最大公因式是非零常数，$p(x)$和$f(x)$互素。

性质2 若$p(x)$为数域P上的不可约多项式，$f(x)$和$g(x)$为数域P上的多项式，且$p(x)$整除$f(x)g(x)$，则或者$p(x)|f(x)$，或者$p(x)|g(x)$。

注意：对于可约多项式，这一性质不成立。如$(x^2-1)|(x+1)(x-1)$，但$(x^2-1)\nmid(x+1)$，同时$(x^2-1)\nmid(x-1)$。

证明：若$p(x)\nmid f(x)$，由性质1，必有

$$(p(x),\ f(x))=1。$$

根据§3.3性质3，$p(x)|g(x)$。故得证。

性质 3 设$p_1(x)$与$p_2(x)$是数域P上的不可约多项式，同时它们不能互相整除。若多项式$f(x)$是$p_1(x)$与$p_2(x)$的公倍式，则也是$p_1(x)p_2(x)$的倍式。

注意：若去掉不可约的条件，此性质不成立。如$(x+1)^2\cdot(x-1)$是x^2-1与$(x+1)^2$的公倍式，但不是$(x^2-1)(x+1)^2=(x+1)^3(x-1)$的倍式。

证明：设$p_1(x)q(x)=f(x)$，由于$(p_1(x),\ p_2(x))=1$，且$p_2(x)|p_1(x)q(x)$，推得$p_2(x)|q(x)$（根据§3.3性质3）。因此$p_1(x)p_2(x)|p_1(x)q(x)$，亦即$p_1(x)p_2(x)|f(x)$，性质得证。

性质1和性质2都是不可约多项式独具的性质，所以它们的逆命题也成立。

性质4 若数域P上次数≥1的多项式$p(x)$具有这样的性质：对于数域P上的任意多项式$f(x)$，或者$p(x)|f(x)$，或者$(f(x),\ p(x))=1$，至少有一种成立，那末$p(x)$一定是不可约多项式。

证明：若$p(x)$是可约多项式，$p(x)=p_1(x)p_2(x)$，其中$p_1(x)$和$p_2(x)$是$p(x)$的非当然因式。

令$f(x)=p_1(x)$，则$p(x)\nmid f(x)$，同时$p(x)$与$f(x)$也不互素，($(f(x), p(x))=f(x)$)。推出矛盾。

性质 5 若数域P上次数$\geqslant 1$的多项式$p(x)$具有这样的性质：若$p(x)|f(x)g(x)$，则$p(x)$至少整除$f(x)$与$g(x)$之一，那末$p(x)$一定是不可约多项式。

证明：若$p(x)$是可约多项式，$p(x)=p_1(x)p_2(x)$，这里$p_1(x)$与$p_2(x)$是$p(x)$的非当然因式。显然$p(x)$整除$p_1(x)p_2(x)$，但$p(x)\nmid p_1(x)$，$p(x)\nmid p_2(x)$，引出矛盾，所以$p(x)$是不可约多项式。

三、例题

例1 证明：$(x^2+x+1)|(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2})$。其中$m$、$n$、$p$均为正整数。

分析：x^2+x+1的根为$\varepsilon_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$和$\varepsilon_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)$，由此，$x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$，$x-\varepsilon_1$和$x-\varepsilon_2$是两个不能互相整除的不可约多项式。要证明本题，由性质3，只须证明$x-\varepsilon_1$和$x-\varepsilon_2$都是$f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$的因式，或证$f(\varepsilon_1)=f(\varepsilon_2)=0$。

证明：由于ε_1是三次单位根，得

$$
\begin{aligned}
f(\varepsilon_1)&=\varepsilon_1^{3m}+\varepsilon_1^{3n+1}+\varepsilon_1^{3p+2}\\
&=(\varepsilon_1^3)^m+(\varepsilon_1^3)^n\cdot\varepsilon_1+(\varepsilon_1^3)^p\cdot\varepsilon_1^2\\
&=1^m+1^n\cdot\varepsilon_1+1^p\cdot\varepsilon_1^2\\
&=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2=0。
\end{aligned}
$$

同理，$f(\varepsilon_2)=0$。

由因式定理，$(x-\varepsilon_1)|f(x)$，$(x-\varepsilon_2)|f(x)$。故$(x-\varepsilon_1)$

$\cdot(x-\varepsilon_2)|f(x)$，或$(x^2+x+1)|(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2})$。

例2 试确定k与l，使多项式

$$f(x)=x^4+kx^2-lx+2$$

是x^2+3x+2的倍式。

分析：$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，$x+1$和$x+2$互不整除。只须确定k与l，使$(x+1)|f(x)$，$(x+2)|f(x)$。由因式定理，只须$f(-1)=0$与$f(-2)=0$同时满足。

解：$f(-1)=1+k+l+2=k+l+3$，

$$f(-2)=16+4k+2l+2=4k+2l+18.$$

由$f(-1)=0$，$f(-2)=0$，得到含有k与l的线性方程组：

$$\begin{cases}k+l+3=0,\\4k+2l+18=0.\end{cases}$$

解得$k=-6$，$l=3$。

习 题 4.1

1.求证：一次多项式是不可约多项式。

2.设c是非零常数，则多项式$p(x)$与$cp(x)$同时是可约或不可约多项式（这里$p(x)$是次数高于零次的多项式）。试证明之。

3.证明：x^2+x+1是实数域和有理数域上的不可约多项式。

4.设$p_1(x)$与$p_2(x)$是首项系数为1的不相等的不可约多项式，若$p_1(x)$与$p_2(x)$都整除多项式$f(x)$，求证其积$p_1(x)p_2(x)$也整除$f(x)$。

5.若m、n、p的奇偶性相同，求证：

$(x^2-x+1)|(x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2})$。

（所谓奇偶性相同，是指同为奇数或同为偶数）

6．证明：多项式$f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$是$x(x+1)(2x+1)$的倍式。

7．证明：$x^{4m}+x^{4n+1}+x^{4k+2}+x^{4l+3}$是$x^3+x^2+x+1$的倍式。其中$m$、$n$、$k$、$l$为正整数。

8．若$(x^2+h^2)|(ax^3+bx^2+cx+d)$，其中$h$是正实数，$a$、$b$、$c$、$d$为复数。求证$ad=bc$。

9．当m是什么正整数时，多项式x^2+x+1整除$x^{2m}+x^m+1$?

10．判断多项式$f(x)=6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6$是否$x^2+1$的倍式。

§4.2　因式分解定理

一、因式分解定理与典型分解式

在整数环中，任何不等于零及±1的整数总能分解为不可分解数的乘积（见附录）。不可分解数即带正、负号的素数，它们的地位相当于多项式环中的不可约多项式。

在中学代数中，多项式因式分解有一些具体方法。但一个多项式分解成什么样子才算分解完了呢？并没有一个确切的标准。另外，也没有说明同一多项式会不会有两种不同的分解方法，即分解有没有唯一性。现在我们具备了多项式方面的一些基础知识，有条件对多项式的因式分解问题从可能性与唯一性两方面给出比较彻底和完整的解答。这就是本章的主要定理——因式分解定理。它将分成两个定理叙述，即本节的定理1与定理2。

定理 1　数域P上任何$n(\geqslant 1)$次的多项式 $f(x)$都可以分解为P上不可约多项式的乘积。

证明：若$f(x)$是数域P上的不可约多项式，则所说的乘积，只由一个因式组成。

若$f(x)$是可约多项式，则$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)$与$f_2(x)$的次数都低于n。若$f_1(x)$与$f_2(x)$之中仍有可约多项式，把它再化为更低次的多项式的乘积。这样一直继续下去。由于$f(x)$的次数n是有限的，故经过有限次后必然终止，得到

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)。\qquad (1)$$

其中各$p_i(x)$都是数域P上的不可约多项式。

定理 2　设数域P上多项式$f(x)$的次数$\geqslant 1$。若$f(x)$有两种不同的方法分解为不可约多项式的乘积：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),\qquad (2)$$

则$s=t$，且在适当交换因式顺序后，有等式

$$q_i(x)=c_i p_i(x),\quad i=1,\ 2,\ \cdots s.$$

其中各c_i是数域P中的非零数。

证明：对$p_i(x)$的个数s使用数学归纳法。

（1）　当$s=1$时，定理成立。

事实上，这时

$$f(x)=p_1(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

必有$t=1$。若$t>1$，与$p_1(x)$的不可约性矛盾，因而$f(x)=p_1(x)=q_1(x)$。

（2）　假定定理对$p_i(x)$个数为$s-1$的情况成立，现在设有多项式$f(x)$能分解为 s 个不可约多项式的积，我们来证明定理也成立。假定

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

则有$p_1(x)|q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，由上节性质 2，至少有一个$q_i(x)$被$p_1(x)$整除。适当调换$q_i(x)$的次序，可以认为$p_1(x)|q_1(x)$。由于$q_1(x)$也不可约，故$p_1(x)$是$q_1(x)$的当然因式，但$p_1(x)$不是零次多项式，故只有

$$p_1(x)=cq_1(x),\quad c\neq 0$$

或$q_1(x)=c_1p_1(x)$，其中$c_1=\dfrac{1}{c}$。

将上述关系式代入（2），得

$$p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=c_1p_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x).\qquad(3)$$

由于$p_1(x)\neq 0(x)$，从（3）两端消去$p_1(x)$，得

$$p_2(x)p_3(x)\cdots p_s(x)=[c_1q_2(x)]q_3(x)\cdots q_t(x).$$

设上式为$f_1(x)$，由上节所述，$c_1q_2(x)$也是不可约多项式。这就是说，$f_1(x)$能分解成$s-1$个不可约多项式之积。由归纳假定，知

第一，$t-1=s-1$，即$t=s$；

第二，$[c_1q_2(x)]$，$q_3(x)$，…，$q_t(x)$经适当调整顺序，可得

$$\begin{aligned}
&c_1q_2(x)=c_2'p_2(x),\\
&q_3(x)=c_3p_3(x),\\
&\cdots\cdots\\
&q_t(x)=c_tq_t(x).
\end{aligned}\qquad(4)$$

其中c_2'及c_3，…，c_t都是非零常数。令$c_2=c_1^{-1}c_2'$，由（4）得$q_i(x)=c_ip_i(x)$，$i=1$，$2\cdots$，s。

证毕。

定理 2 说明多项式分解为不可约多项式的乘积时，除了

非零常数因子及次序外，是唯一的。如

$$x^2-1=(x+1)(x-1)=(2x-2)(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}),$$

在上述意义下，可以认为是两种相同的分解。但这样总感不便，为统一起见，我们把所有的 $p_i(x)$ 的首项系数都提到括号之外，则 $f(x)$ 唯一地（不计次序）分解为：

$$f(x)=a_0p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)。\qquad (5)$$

这里各 $p_i(x)$ 首项系数都是1。

分解式（5）中的 $p_i(x)$ 可能有相同的，我们把相同的 $p_i(x)$ 的乘积写成方幂的形式，那末 $f(x)$ 可写成

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)。\qquad (6)$$

这里 $r\leqslant s$，且显然 $k_1+k_2+\cdots+k_r=s$。k_i 称为 $p_i(x)$ 在 $f(x)$ 分解式中的重数。等式（6）称为在数域 P 上 $f(x)$ 的典型分解式。由定理1、2，每个多项式的典型分解式除了因子次序外，是唯一确定的。典型分解式可能因数域不同而不同，如 $f(x)=x^6-3x^2-2$ 在有理数域上的典型分解式为

$$f(x)=(x^2-2)(x^2+1)^2;$$

而在实数域上的典型分解式为

$$f(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+1)^2;$$

在复数域上的典型分解式为

$$f(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+i)^2(x-i)^2。$$

二、典型分解式的两个应用

假若已知两个多项式的典型分解式：

$$\begin{aligned} f(x)&=a_0p_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots q_s^{k_s}(x),\\ g(x)&=b_0p_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)h_{r+1}^{l_{r+1}}(x)\cdots h_t^{l_t}(x)。\end{aligned}\qquad (7)$$

又假定它们有r个共同的不可约因式($r\geqslant 0$)：$p_1(x),\cdots,p_r(x)$，其它因式$q_i(x)$和$h_j(x)$各不相同。现在我们用 (7) 式来求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式与最小公倍式。

推论1 设$m_i=min\{k_i, l_i\}$，$i=1, 2\cdots, r$，则$d(x)\equiv p_1^{m_1}(x)\cdots p_r^{m_r}(x)=(f(x), g(x))$。注

证明：首先，$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式。这是因为$k_i\geqslant m_i$，$l_i\geqslant m_i$，$i=1, \cdots, r$。

其次，设$d_1(x)$是$f(x)$和$g(x)$的任一公因式，把$d_1(x)$写成典型分解式时，其不可约因式只能是$p_i(x)$（见(7)式）。因为若有某个不可约因式不在$p_1(x),\cdots, p_r(x)$之列，它必然不能同时整除$f(x)$和$g(x)$。因而，也就不是$d(x)$的因式。设

$$d_1(x)=cp_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_r^{n_r}(x).$$

显然，$n_i\leqslant m_i$，$i=1, \cdots, r$。所以$d_1(x)|d(x)$。

因此，$d(x)=(f(x), g(x))$。

推论2 设$u_i=max\{k_i, l_i\}$，$i=1, \cdots, r$。则

$$m(x)\equiv p_1^{u_1}(x)\cdots p_r^{u_r}(x)q_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots q_s^{k_s}(x)h_{r+1}^{l_{r+1}}(x)\cdots \cdot h_t^{l_t}(x)=[f(x), g(x)].$$

证明：首先，$m(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公倍式，这因为$k_i\leqslant u_i$，$l_i\leqslant u_i$，$i=1, \cdots, r$。

其次，设$m_1(x)$是$f(x)$和$g(x)$的任一公倍式，则$m_1(x)$的典型分解式中，一定既有$f(x)$的不可约多项式因式，也有$g(x)$的不可约多项式因式，而且对应的幂指数不能低于$m(x)$

注 $min\{k_i, l_i\}$表示k_i与l_i中较小者，如$min\{2, 5\}=2$。另外，$max\{k_i, l_i\}$则表示k_i与l_i中的较大者，如$max\{2, 5\}=5$。

的指数。因而，必有$m(x)\mid m_1(x)$。

所以，$m(x)=[f(x),\ g(x)]$。

例 1 设$f(x)=(x+1)^2(x+2)^3(x-1)(x+4)$，

$$g(x)=(x+1)^3(x+2)^3(x-2)^3(x-3)^2,$$

求$(f(x),\ g(x))$和$[f(x),\ g(x)]$。

解：利用推论 1 和推论 2，不难看出

$$(f(x),\ g(x))=(x+1)^2(x+2)^3;$$

$$[f(x),\ g(x)]=(x+1)^3(x+2)^3(x-1)\cdot(x+4)(x-2)^3(x-3)^2.$$

注意：也许有的读者会想，既然用典型分解式来求最大公因式和最小公倍式如此简便，就可以不要用繁琐的辗转相除法了，但这是一个不切实际的想法。因为本节讲的这个方法，必须已知多项式的典型分解式，即将多项式分解成不可约多项式的乘积。这件事本身并不容易作到，因为我们没有一个实际可行的分解方法，甚至要判断一个多项式在某一数域上是否可约都不容易。所以，上述方法仅对特殊情形才有实用价值。

至于怎样来分解因式，迄今为止，尚未有一般的方法，只不过对某些特殊类型的多项式才有分解方法。因这些问题大部分属于初等代数的范围，在此不再详述。

例 2 试分别在有理数域、实数域及复数域上分解多项式$f(x)=x^4-25$。

解：在有理数域上，有

$$f(x)=(x^2+5)(x^2-5).$$

在实数域上，有

$$f(x)=(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}).$$

在复数域上，有

$$f(x)=(x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}).$$

习 题 4.2

1. 试分别在有理数域、实数域及复数域上，把下列多项式分解为不可约多项式之积：

(1) x^4-4；　　(3) x^4+2x^2+1；

(2) x^6+27；　　(4) x^6-1.

2. 试求下列多项式的最大公因式与最小公倍式：

(1) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$,
$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$；

(2) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$，$(x^2-1)^3$；

(3) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$,
$(x-1)^2(x+2)(x+5)$；

(4) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$,
$(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$.

3. 利用多项式的典型分解式证明：

(1) $(f^n(x), g^n(x))=(f(x), g(x))^n$；

(2) $[f^n(x), g^n(x)]=[f(x), g(x)]^n$.

4. 利用§3.5定理1与本节推论1，证明推论2.

§4.3 有理数域上的不可约多项式

上节讨论的是一般数域上的不可约多项式，现在我们讨论具体数域——有理数域上的不可约多项式．主要研究两个问题：第一，证明有理系数多项式的因式分解可归结为整系

数多项式的因式分解；第二，给出有理数域上不可约多项式的一个判别法。

一、本原多项式

首先引进一个概念。

定义 1 若$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$的系数$b_n$，$b_{n-1}$，…，$b_0$都是整数，且$(b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0)=1$，则称$g(x)$是一个本原多项式。注

如$2x^3+3x^2-2x+1$就是本原多项式；但$2x^4-4x^2+8x+14$却不是本原多项式，因为系数的最大公因数是2。

显然，若整系数多项式有一个系数是± 1，那末这个多项式必是本原多项式。下面我们来找有理系数多项式和本原多项式之间的关系。先看一个例子：

假定$f(x)=\frac{11}{6}x^3+\frac{44}{3}x^2-22x+\frac{44}{5}$，则$f(x)=\frac{11}{30}\cdot(5x^3+40x^2-60x+24)$。设$g(x)=5x^3+40x^2-60x+24$，$g(x)$显然是一个本原多项式。这就是说，$f(x)$可表为一个有理数和一个本原多项式相乘。对于有理数域上的任意多项式，这一点都成立。

引理 1 设$f(x)$是非零有理系数多项式：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0. \qquad (1)$$

则$f(x)$可表示成$f(x)=rg(x)$，其中r为有理数，而$g(x)$为本原多项式。这种表示法，在不计正负号的意义下是唯一的。

证明：存在性。

因为a_n，…，a_0都是有理数，故皆可表为既约分数。设

注 $(b_n, \cdots, b_0)$即b_n，…，b_0的最大公因数，参见书末附录。

$a_n=\frac{q_n}{p_n}$, $a_{n-1}=\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}$, $\cdots, a_0=\frac{q_0}{p_0}$.假定分母$p_n, p_{n-1}, \cdots, p_0$的最小公倍数是$c$，那末$cf(x)$是一个整系数多项式。再设$cf(x)$各系数的最大公因数是$d$，则$\frac{c}{d}f(x)=g(x)$的系数是互素的整数，因而$g(x)$是本原多项式。于是，$f(x)=\frac{d}{c}g(x)=rg(x)$，其中$r=\frac{d}{c}$。

唯一性。

设$f(x)$又表为

$$f(x)=r_1g_1(x),$$

其中$g_1(x)$是本原多项式，r_1是有理数。不妨设

$$g_1(x)=b_n'x^n+b_{n-1}'x^{n-1}+\cdots+b_0', r_1=\frac{d_1}{c_1}.$$

由于$f(x)=rg(x)=r_1g_1(x)$，故

$$\frac{d}{c}(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0)$$

$$=\frac{d_1}{c_1}(b_n'x^n+b'_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0').$$

或 $c_1d(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0)$

$$=cd_1(b_n'x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0').$$

上式两端比较系数，得

$$c_1db_n=cd_1b_n', \cdots, c_1db_0=cd_1b_0'.$$

因而c_1d是$cd_1b_n', \cdots, cd_1b_0'$的公因数，又由于$b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0$是互素的整数，故$c_1d$是$cd_1b_n', \cdots, cd_1b_0'$的最大公因数；同理，$cd_1$也是它们的最大公因数。因而$c_1d=\pm cd_1$，

或$\frac{c}{d}=\pm\frac{c_1}{d_1}$，$r=\pm r_1$（见书末附录）。

从等式$rg(x)=r_1g_1(x)=\pm rg_1(x)$两端消去$r$（$r\neq0$），得$g(x)=\pm g_1(x)$。

这就证明了唯一性。

证毕。

这个引理说明，有理系数多项式可化为一个有理数与一个本原多项式之积。因而有理系数多项式的因式分解，可以归结为整系数多项式的因式分解。不仅如此，整系数多项式能否分解成有理系数多项式之积的问题，也与它能否分解成整系数多项式之积的问题等价。为此，先证明一个引理，即高斯引理。

引理2　两个本原多项式之积，还是本原多项式。

分析：用反证法。设两个本原多项式之积不是本原多项式，则其积的系数至少有一个素数公因子p，从而推出矛盾。

证明：设　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

是两个本原多项式，而它们的积可表为

$$h(x)=f(x)g(x)=d_{m+n}x^{m+n}+d_{m+n-1}x^{m+n-1}+\cdots+d_0.$$

若$h(x)$不是本原多项式，设素数p是$h(x)$各系数的一个公因子。下面我们用p来试除$f(x)$的系数。若$p\nmid a_0$，则取$a_i=a_0$，否则，要看p是否整除a_1，若$p\nmid a_1$则取$a_i=a_1$；若$p|a_1$，再往下看。由于p不可能是$f(x)$系数的公因数（这是因为$f(x)$是本原多项式），所以，总存在a_i（$0\leqslant i\leqslant n$），使$p|a_0,\cdots,p|a_{i-1}$，$p\nmid a_i$。即a_i是满足$p\nmid a_i$的第一个系数。

同样，可以推得$g(x)$也存在一个系数b_j，使$p|b_0,\cdots,p|b_{j-1}$，$p\nmid b_j$（$0\leqslant j\leqslant m$）。

下面来分析$h(x)$的系数d_{i+j}。

易见

$$d_{i+j}=a_ib_j+a_{i+1}b_{j-1}+\cdots+a_{\;-1}b_{j+1}+\cdots. \qquad (2)$$

(2)式右端各项中除第一项外，每项的两个因数中，有一个可被p整除，因而p整除(2)式右端除第一项外的其他各项。但由于p是素数，$p\nmid a_i$，$p\nmid b_j$，故$p\nmid a_ib_j$。所以p不能整除(2)式右端，因而$p\nmid d_{i+j}$。

由假定，p是$h(x)$各系数的公因子，自然$p|d_{i+j}$，推出矛盾。故$h(x)$是本原多项式。

证毕。

在高斯引理的基础上可得下述定理：

定理1 设$f(x)$是整系数非零多项式。若有比$f(x)$次数低的有理系数多项式$g(x)$和$h(x)$，满足$f(x)=g(x)h(x)$，则$f(x)$可表为两整系数多项式之积，它们至多与$g(x)$和$h(x)$差一个非零常数因子。

注意：本定理也可简述为，整系数多项式若在有理数域上可约，必在整数环上可约。

证明：设d为$f(x)$各系数的最大公因数，$f(x)=df_1(x)$，则$f_1(x)$的系数必互素，因而是本原多项式。另一方面，据引理1，存在有理数r和s以及本原多项式$g_1(x)$和$h_1(x)$，使

$$g(x)=rg_1(x),\quad h(x)=sh_1(x).$$

故有

$$f(x)=g(x)h(x)=rsg_1(x)h_1(x).$$

由本节引理2，$g_1(x)h_1(x)$也是本原多项式。

这样，$f(x)$用两种方法表为有理数与本原多项式之积：$f(x)=rsg_1(x)h_1(x)$，$f(x)=df_1(x)$。据引理1，rs和d只能相差一个正负号，$rs=\pm d$，因此rs是个整数。这时$rsg_1(x)$

和$h_1(x)$都是整系数多项式，且次数分别与$g(x)$、$h(x)$相同，低于$f(x)$的次数，$f(x)=[rsg_1(x)]h_1(x)$是两个整系数多项式的积。定理得证。

二、艾森斯坦准则

复数域和实数域上的多项式，比较容易判别是否可约，有理数域上的多项式就比较复杂，然而，有理系数多项式的因式分解问题与整系数多项式的因式分解问题是一致的，有理系数多项式是否可约与相应的整系数多项式是否可约是一致的，因此，只须讨论整系数多项式不可约的判别方法。下面给出的判别定理称为艾森斯坦（*Eisenstein*）判别法，它虽是一个充分条件，但应用是很广的。注

定理2 （艾森斯坦判别法）

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$是一个整系数多项式，若有一个素数$p$，满足以下三个条件：

（1）p不整除首项系数a_n；

（2）p整除其他各项系数a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_0；

（3）p^2不整除常数项a_0，

那末，$f(x)$在有理数域上不可约。

证明：若$f(x)$在有理数域上可约，由定理1，$f(x)$可分解为两个次数低于n的整系数多项式之积：

$$f(x)=(b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0)\cdot(c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0)。\qquad(3)$$

比较上式两端的首项和常数项，有

$$a_n=b_lc_m,\quad a_0=b_0c_0。$$

注 *F.G.Eisenstein*（1823—1852），德国数学家．

因为$p|a_0$，p是素数，所以p至少整除b_0和c_0之一。但p不会同时整除b_0和c_0，否则$p^2|b_0c_0$，与定理条件（3）矛盾。所以p只能整除b_0和c_0中的一个，不妨设$p|b_0$，$p\nmid c_0$。

另一方面，由$p\nmid a_n$，$a_n=b_lc_m$，故$p\nmid b_l$。我们把b_0，b_1，…，b_l排起来，p整除第一个数b_0，不整除最后一个数b_l，由前往后看，总有第一个不能被p整除的b（$0<k\leqslant l$）存在。即$p\nmid b_k$，$p|b_{k-1}$，…，$p|b_0$。

比较（3）式两端x^k的系数：左端为a_k，右端为$b_kc_0+b_{k-1}\cdot c_1+\cdots+b_0c_k$，故

$$b_kc_0=a_k-(b_{k-1}c_1+\cdots+b_0c_k)\text{。} \qquad (4)$$

由于$p|a_k$，且p整除（4）式右端括号里的各项第一个因子b_{k-1}，…，b_0，故p整除（4）式左端，即$p|b_kc_0$。但由于$p\nmid c_0$，$p\nmid b_k$，p为素数，故$p\nmid b_kc_0$，出现矛盾。因而证明了$f(x)$是有理数域上的不可约多项式。定理得证。

例 1 求证：多项式$f(x)=x^n+10(n>0)$在有理数域上不可约。

证明：这里$a_n=1$，$a_0=10$，其他$a_i=0$。取$p=5$，显然$p\nmid a_n$，$p|a_{n-1}$，$p|a_{n-2}$，…，$p|a_0$，$p^2\nmid a_0$，满足定理条件，推出x^n+10的不可约性。

例 2 证明：多项式

$$f(x)=5x^6+6x^4-144x^3+18x^2-42x+12$$

在有理数域上不可约。

证明：取$p=3$。不难验证满足定理2的条件，故$f(x)$是有理数域上的不可约多项式。

例 3 证明：$f(x)=x^6+x^3+1$在有理数域上不可约。

分析：直接利用定理2不能得出判断，须将$f(x)$稍加变

形。

证明：令$x=y+1$，得y的多项式

$$g(y)=f(1+y)=(y+1)^6+(y+1)^3+1$$
$$=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3.$$

令$p=3$，显然p整除除首项外其他各项的系数，且$p^2=9$不整除常数项3，故$g(y)$是有理数域上的不可约多项式。因而$f(x)$也是有理数域上的不可约多项式。这是因为，若$f(x)$可约，必能分解成两个次数低于6次的有理系数多项式相乘，通过$x=y+1$的代换推出$g(y)$也可约。

例 4 设p是一个素数，多项式

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1\left(=\frac{x^p-1}{x-1}\right)$$

称为割圆多项式，求证割圆多项式在有理数域上不可约。

证明：令$x=y+1$，得

$$g(y)=f(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}$$
$$=\frac{y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots+C_p^{p-1}y}{y}$$
$$=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}.$$

$g(y)$首项系数为1，其他各项系数为C_p^1，…，C_p^{p-1}.其中$C_p^i=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$，$i=1,2,\cdots,p-1$.这时，由于$p$是素数，所以$i!$整除$(p-1)\cdots(p-i+1)$，因而$p$整除$C_p^i$，$i=1,2,\cdots,p-1$。但常数项$C_p^{p-1}=p$，故$p^2\nmid C_p^{p-1}$。这样，定理的三个条件全部满足，$g(y)$在有理数域上不可约，从而证明了$f(x)$的不可约性。

习　题　4.3

1.设$f(x)$和$g(x)$是整系数多项式，且$g(x)$是本原多项式。如$f(x)=g(x)h(x)$，其中$h(x)$是有理系数多项式，那末$h(x)$一定是整系数多项式。试证明之。

2.求证：有理数域上的三次多项式不可约的充要条件是它没有有理根。举例说明四次多项式没有有理根但也可以是有理数域上的可约多项式。

3.证明下列多项式在有理数域上不可约：

（1）x^4+1；

（2）$x^4-8x^3+12x^2+2$；

（3）x^p+px+1，其中p是大于2的素数；

（4）$x^4+4kx+1$，其中k为整数；

（5）x^4-x^3+2x+1；

（6）$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-1$；

（7）x^8+1。

4.设$f(x)$是有理数域上的多项式，作多项式$\varphi(x)=f(ax+b)$，其中a，b是有理数，$a\neq0$。求证：$f(x)$在有理数域上不可约的充要条件是$\varphi(x)$在有理数域上不可约。

§4.4　重因式

一、什么是重因式？

定义1　假定$f(x)$是数域P上的多项式，$p(x)$是$f(x)$的因式。若$p^k(x)|f(x)$，但$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称$p(x)$为$f(x)$的k重因式。当$k>1$时，称重因式，而当$k=1$时，称单因式。

若$p(x)\nmid f(x)$，则称为零重因式。

我们知道，$f(x)$有一次因式$x-c$等价于c是$f(x)$的根，故当$x-c$是$f(x)$的k重因式时，就称c是$f(x)$的k重根，$k>1$称重根，$k=1$则称单根。

如$f(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$，则$x-1$是$f(x)$的二重因式，故1是$f(x)$的二重根；$x-2$和$x-3$是$f(x)$的单因式，因而2和3是$f(x)$的单根。

二、一个新工具——导数

如果我们已经知道多项式的典型分解式，那就可以立刻知道它有没有重因式了。但在没有作任何因式分解的情况下，如何判断一个多项式有没有重因式呢？

设$f(x)=(x-1)^2$。$f(x)$在$x=1$时为0，1是它的重根。$y=(x-1)^2$的图象（在实数域上考虑）在点1处与x轴相切，就是说在该点切线斜率也是0。而切线的斜率就是其导数$f'(x)=2(x-1)$，因此，1也是$f'(x)$的根，即$f(x)$与$f'(x)$的公根。在这个例子中，重根是$f(x)$与$f'(x)$的公根，这不是偶然的，而是一个普遍的规律。为了证明它，需要使用导数这个工具。

在数学分析中，我们学过导数的概念。如多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

的导数（或一阶导数）是指多项式

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}. \qquad (2)$$

一阶导数再求一次导数，就是二阶导数，记为$f''(x)$。二阶导数的导数就是三阶导数，记为$f'''(x)$。一般地，$f(x)$的k阶导数记为$f^{(k)}(x)$。

如 $f(x)=4x^3+3x^2-2x+1$ 的各阶导数为

$f'(x)=12x^2+6x-2$；

$f''(x)=24x+6$；

$f'''(x)=24$；

$f^{\mathrm{IV}}(x)=0$。

容易看出，n次多项式（$n>0$）的一阶导数为$n-1$次多项式，二阶导数为$n-2$次多项式，…，n阶导数是一个常数（等于$n!a_0$），$n+1$阶导数是零。

数学分析中，导数有以下计算公式：

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)。\quad (3)$$

$$[f(x)g(x)]'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)。\quad (4)$$

$$[p^k(x)]'=kp^{k-1}(x)p'(x)。\quad (5)$$

但是，大家知道，在数学分析中考虑的是定义在实数范围的函数。导数的概念是通过极限引进的，需要利用实数集的连续性。现在我们讨论的是任意数域P上的多项式，不能利用数域本身的连续性。但是，我们可以采用形式定义的方法。假定数域P上的多项式$f(x)$形如（1），规定$f(x)$的导数$f'(x)$如（2）所示。可以直接验算导数公式（3）、（4）、（5）仍然成立。

三、导数与重因式的关系

定理1 设$p(x)$是多项式$f(x)$的$k(k\geqslant1)$重不可约因式，则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式。

分析： 要证$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，须证$p^{k-1}(x)|f'(x)$，但$p^k(x)\nmid f'(x)$。

证明： 由于$p(x)$是$f(x)$的k重因式，即有

$$f(x)=p^k(x)g(x),\quad p(x)\nmid g(x).\tag{6}$$

对(6)式求导数，用公式(4)与(5)，得

$$\begin{aligned}f'(x)&=[p^k(x)g(x)]'=p^k(x)g'(x)+[p^k(x)]'g(x)\\&=p^k(x)g'(x)+kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)\\&=p^{k-1}(x)[P(x)g'(x)+kp'(x)g(x)].\end{aligned}$$

显然，$p^{k-1}(x)\mid f'(x)$。

下面证明$p^k(x)\nmid f'(x)$。首先，$p(x)$不会整除$kp'(x)g(x)$。这是因为$p(x)\nmid p'(x)$($p'(x)$的次数比$p(x)$的次数低)，同时，$p(x)\nmid g(x)$，而$p(x)$是不可约多项式，根据§4.1性质2，$p(x)\nmid kp'(x)g(x)$。

其次，$p(x)\mid p(x)g'(x)$。

因而，$p(x)\nmid[p(x)g'(x)+kp'(x)g(x)]$，推得$p^k(x)\nmid f'(x)$。总之，$p(x)$是$f'(x)$的$k—1$重因式。

证毕。

推论 1 设$p(x)$是$f(x)$的单因式，则$p(x)$不是$f'(x)$的因式。

证明： 取$k=1$，由定理1，$p(x)$是$f'(x)$的零重因式，即不整除$f'(x)$。

注意： 定理1的逆定理不正确。若$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，不能肯定$p(x)$是$f(x)$的k重因式，如$f(x)=x^3-3x^2+3x+3$的导数$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$。$x-1$是$f'(x)$的二重因式，但根本不是$f(x)$的因式，当然更不是三重因式。然而，如果$p(x)$同时又是$f(x)$的因式，即可推出$p(x)$是$f(x)$的k重因式。这就是

定理 2 若$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重不可约因式，$p(x)\mid f(x)$，则$p(x)$是$f(x)$的k重因式。

证明：因为$p(x)|f(x)$，故$p(x)$是$f(x)$的不低于一重的因式。设重数为l，则$l\geqslant 1$。由定理，$p(x)$为$f'(x)$的$l-1$重因式。但已知$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，因而$l-1=k-1$，$l=k$，所以$p(x)$是$f(x)$的k重因式。

四、有无重因式的判别

定理 3 多项式$f(x)$没有重因式的充要条件是$f(x)$与它的导数互素。

证明：假定$f(x)$已经分解为典型分解式：

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_t^{k_t}(x),$$

由于$p_1(x)$是$f(x)$的k_1重因式，故为$f(x)$的 k_1-1 重因式，同理，$p_2(x)$是$f'(x)$的k_2-1重因式，…，$p_t(x)$是 $f'(x)$ 的k_t-1重因式。于是，可表$f'(x)$为

$$f'(x)=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_t^{k_t-1}(x)g(x).$$

其中$g(x)$不能被$p_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_t(x)$中任何一个整除，因而

$$(f(x),f'(x))=d_1(x)=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_t^{k_t-1}(x).$$

若$f(x)$无重因式，即$k_1=k_2=\cdots=k_t=1$，则 $d_1(x)=1$，即$f(x)$与$f'(x)$互素；

反之，设$f(x)$与$f'(x)$互素，则 $k_1-1=k_2-1=\cdots=k_t-1=0$，$k_1=k_2=\cdots=k_t=1$，所以$f(x)$无重因式。

证毕。

这个定理，使我们能够利用最大公因式来判断有无重因式，而最大公因式可以通过辗转相除法得到。因而，使判断有无重因式成为可能。

有时，并不需要知道多项式的典型分解式

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),$$

而仅仅要求知道 $f(x)$ 所有不同的不可约因子：$p_1(x)$，…，$p_s(x)$。对于这种问题，应采取以下的方法：

设$d(x)=(f(x),\ f'(x))$，则由上可知，

$$d(x)=p_1^{k_1-1}(x)\cdots p_s^{k_s-1}(x).$$

$d(x)$除$f(x)$的商记为$F(x)$，那末

$$F(x)=\frac{f(x)}{d(x)}=a_0p_1(x)\cdots p_s(x).$$

于是，得到一个无重因式的多项式$F(x)$，且若不计重数，$F(x)$和$f(x)$含有完全相同的不可约因式。因此，如求$f(x)$的不可约因式，只须求$F(x)$的不可约因式。特别，欲求$f(x)$的根，只须求$F(x)$的根。

例 1　判断多项式$f(x)=2x^3+5x^2+4x+1$有没有重因式？

分析：由定理 3，只须判断$f(x)$与$f'(x)$是否互素。

解：$f'(x)=6x^2+10x+4$。

经过辗转相除，得$(f(x),\ f'(x))=x+1$。$f(x)$和$f'(x)$不互素，根据定理 3，$f(x)$有重因式，重因式为$x+1$。

例 2　设$f(x)=x^n+1(n>0)$，求证$f(x)$没有重根。

证明：因为$f'(x)=nx^{n-1}$的因式只能是ax^k形的多项式，其中$a\neq 0$，$0\leqslant k\leqslant n-1$。但当$k>0$时$ax^k$不整除$x^n+1$，因而$(f(x),\ f'(x))=1$，$f(x)$没有重根。

例 3　试确定A、B，使$x-1$是三项式$f(x)=Ax^{n+1}+Bx^n+1(n>1)$的至少二重因式。

分析：首先，$x-1$能整除$f(x)$，故$f(1)=0$；其次，$x-1$能整除$f'(x)$，故$f'(1)=0$。

解：$f'(x)=(n+1)Ax^n+nBx^{n-1}$。

$$\begin{cases}0=f(1)=A+B+1,\\0=f'(1)=(n+1)A+nB.\end{cases}$$

解得　$A=n$，$B=-n-1$。

所以　$f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$为所求的多项式。

注意：如果问题中"至少"二字去掉，则还要证明$(x-1)^3\nmid f(x)$，或$x-1$不是$f''(x)$的因式，即$f''(1)\neq0$。事实上，由于

$$f''(x)=(n+1)n^2x^{n-1}-n(n^2-1)x^{n-2},$$

$$f''(1)=n^2(n+1)-n(n^2-1)=n^2+n\neq0.$$

所以$x-1$不是$f(x)$的三重因式。

例 4　试证多项式

$$f(x)=x^n+ax^{n-m}+b\quad(n>m>0)$$

没有高于二重的非零根。

分析：$f(x)$高于二重的根一定是$f'(x)$的重根，因此，只须证明$f'(x)$没有非零的重根即可。

证明：$f'(x)=nx^{n-1}+(n-m)ax^{n-m-1}$

$$=x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a].$$

若$a\neq0$，则$f'(x)$的非零根是数$\dfrac{-(n-m)a}{n}$的m次方根，这些根都是单根，所以$f'(x)$没有非零的重根。因而$f(x)$没有高于二重的非零根。

若$a=0$，则$f(x)=x^n+b$。这时，若$b=0$，则$f(x)=x^n$，只有根零．若$b\neq0$，则$f(x)$的根只有单根，这些单根由$-b$的n次方根组成，当然也没有高于二重的非零根。

例 5　多项式

$$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$$

在有理数域上有哪些不可约因式（不求重数）？

分析：只须求$F(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$的不可约因式。

解：由　$f'(x)=5x^4-30x^2-40x-15$，得

$$d(x)=(f(x),\ f'(x))=x^3+3x^2+3x+1$$
$$=\ (x+1)^3.$$

$$F(x)=\frac{f(x)}{d(x)}=x^2-3x-4=(x-4)(x+1)\ .$$

所以，$f(x)$的不可约因式是$x-4$与$x+1$。

习　题　4.4

1.求证：若a是$f(x)$的k重根（$k>1$），则a是$f(x)$，$f'(x)$，…，$f^{(k-1)}(x)$的根，但不是$f^{(k)}(x)$的根；反之，若a是$f(x)$，$f'(x)$，…，$f^{(k-1)}(x)$的根，不是$f^{(k)}(x)$的根，则a是$f(x)$的k重根。

2.设$f(x)=x^2+px+q$，用本节定理证明：$f(x)$有重根当且仅当$p^2-4q=0$。

3.　求证：$(x-1)^2|[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1]$。

4.　求证：$(x^2+2x+1)|(x^{4n+2}+2x^{2n+1}+1)$。

5.　求证：多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

无重根。

6.　举例说明“若a是$f'(x)$的m重根，则a一定为$f(x)$的$m+1$重根”是不对的。

7. 试确定a和b的值，使多项式

$$f(x)=x^4+(a+b)x^3+(a-b)x^2+(a^2+2b-1)x+a+b+4$$

被$(x-1)^2$整除。

8. 试确定系数a，使-1是多项式

$$f(x)=x^5-ax^2-ax+1$$

的重数不低于2的重根。

9. 证明：$f'(x)$整除$f(x)$当且仅当

$$f(x)=a_0(x-x_0)^n。$$

10. 求证：1是多项式

$$f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$$

的四重根。

11. 求证：x^3+px+q有重根当且仅当

$$4p^3+27q^2=0。$$

12. 找出多项式

$$f(x)=x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4$$

在有理数域上的不可约因式（不计重数）。

13. 证明：多项式

$$f(x)=x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!$$

不可能有重根。

14. 若多项式$f(x)=ax^3+3bx^2+3cx+d$有二重根，证明这个根是$\dfrac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$．这里假定$ac\neq b^2$。

15. 若实数域上的多项式

$$f(x)=x^5-10a^3x^2+b^4x+c^5$$

有三重实根，证明：$ab^4-9a^5+c^5=0$，$-15a^4+b^4=0$。

本 章 提 要

1.不可约多项式：数域P上高于零次的多项式，如果只有当然因式，则称为数域P上的不可约多项式.

2.因式分解定理：数域P上高于零次的多项式，可以分解为P上不可约多项式的乘积，除次序和非零常数因子外，分解是唯一的.

3.典型分解式：形如

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$$

的分解式，其中$p_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_r(x)$是数域P上首项系数为1且互不相同的不可约多项式，k_1，k_2，…，k_r是正整数，称为$f(x)$在数域P上的典型分解式.

4.重因式：

（1）若$p^k(x)|f(x)$，$p^{k-1}(x)\nmid f(x)$，$k\geqslant 1$，则称$p(x)$是$f(x)$的k重因式；

（2）若$p(x)$是$f(x)$的不可约因式，则$p(x)$是$f(x)$的k重因式的充要条件为$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式；

（3）$f(x)$无重因式当且仅当$(f(x),f'(x))=1$；

（4）设$(f(x),f'(x))=d(x)\neq 0(x)$，则多项式$F(x)=\dfrac{f(x)}{d(x)}$无重因式，且和$f(x)$有共同的不可约因式.

5.有理数域上不可约多项式的艾森斯坦判别法：若有素数p，整除整系数多项式$f(x)$的除首项之外的各项系数，但不整除首项系数，同时p^2不整除常数项，则$f(x)$在有理数域上不可约.

复 习 题 四

1.证明以下多项式在有理数域上不可约：

（1）$x^4+2x^3+4x^2+6x+14$；

（2）x^4-x^3+2x+1；

（3）$x^4+x^3+x^2+x+1$；

（4）$x^{16}+1$.

2.证明

$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)|(x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+\cdots+x^{ka_k+k-1})$.

3.证明以下各多项式是$(x-1)^3$的倍式：

（1）$x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ $(n>1)$；

（2）$x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$；

（3）$(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$ $(n>2m>0)$.

4.求证：若$(x-1)|(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$，则$(x^k-1)|(a_0x^{kn}+a_1x^{k(n-1)}+\cdots+a_n)$.

5.当n为何正整数时，$(x^2+x+1)^2$整除$(x+1)^n-x^n-1$？

6.当n为何正整数时，$(x^2+x+1)^2$整除$(x+1)^n+x^n+1$？

7.证明：

$(x^4+x^3+x^2+x+1)|(x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1)$.

8.试确定a，b，使$(x-1)^2|(ax^4+bx^3+1)$.

9.试确定a，b，使$(x-1)^2|(ax^{n+1}+bx^n+1)$.

10.判断：

（1）2是$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$的几重根？

（2）-2是$x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$的几重根？

11.当q是什么数时，x^3-3x+q有一个重根？

12.证明：x^2+1整除多项式

$f(x)=(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi$.

13.证明：任意数域上的不可约多项式在复数域中无重根

第五章　一元n次方程

本章讨论一元n次方程的基本理论和一些常用方法，主要包括：根的存在性、根的个数、根与系数的关系、三次与四次方程解法以及有理系数方程的有理根求法。这些问题应用较为广泛，同时与初等数学关系十分密切。

§5.1　代数基本定理

一、代数基本定理及其推论。

数域P上的一元n次方程，是指形如

$$f(x)=0 \tag{1}$$

的方程，其中$f(x)$是数域P上的一元n次多项式，若p中的α适合(1)，即$f(\alpha)=0$，则称α是方程(1)在数域P中的解或根。

假定数域$\overline{P}$包含P，则数域P上的一元n次方程也可看作数域$\overline{P}$上的一元n次方程，它在数域P中的根也是$\overline{P}$中的根。

如果α是多项式$f(x)$的根，则α也是方程(1)的根，因而下面的叙述中，多项式的根与方程的根这两个概念，常不加区分。

有时方程也写成

$$f(x)=g(x) \tag{2}$$

的形式，其中$f(x)$和$g(x)$都是数域P上的多项式.(2)与(1)没有本质的区别，因为若设$h(x)=f(x)-g(x)$，则(2)等价于方程$h(x)=0$，归为(1)形.（2)不应理解为多项式相等（恒等）.

本章只研究一元n次方程，这一章与下一章里凡是提及"方程"，均指一元n次方程.

方程理论的主要任务是探讨方程根的存在性、根的个数、根的性质以及根的求法等方面的问题.

一个方程有没有根，显然与数域有密切关系.如

$$x^3+2=0 \tag{3}$$

看作有理数域上的方程时，没有根（也就是说，它没有有理根).但若将(3)看作复数域上的方程时,则有三个根：$-\sqrt[3]{2}$，$-\sqrt[3]{2}\varepsilon$，$-\sqrt[3]{2}\ \varepsilon^2$，其中$\varepsilon$是三次原根.一般地说,复数域上任何$n\geqslant 1$次方程都至少有一个复根,进而可推出有$n$个复根.这就是著名的"代数基本定理".

历史上，解方程一直是数学（特别是代数学）中最基本的问题之一.十八世纪末叶以前的数学家已经猜到n次方程至少有一个复根，并企图证明它,但是证明都有错误.直到1799年，德国的高斯（Gauss）才给出这个结论的第一个正确的证明，后来他又给出了另外几个证明方法.代数基本定理公认是数学上重大成果之一，从它的命名，也可看到它的重要性.

代数基本定理 复数域上的任何一元n次方程（$n\geqslant 1$）至少有一个复根.

这个定理现在已经有很多证明方法，但所有的证明都或多或少地用到复多项式的连续性.因利用复变函数的结论极

易证得，这里暂时略去它的证明。

注意：若不是代数方程，那末上述定理就不成立。如方程$2^x=0$不仅没有实根，也没有复根。

设有复数域上的n次方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n= . \tag{4}$$

根据代数基本定理，(4)至少有一复根 α_1，则$f(\alpha_1)=0$。根据因式定理，$(x-\alpha_1)|f(x)$。设

$$f(x)=(x-\alpha_1)q_1(x),$$

则$q_1(x)$应为$n-1$次多项式。同理，方程$q_1(x)=0$也至少有一复根，设为α_2，则有

$$q_1(x)=(x-\alpha_2)q_2(x).$$

如此继续下去，可得

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)q_n(x). \tag{5}$$

上式两端比较次数，知$q_n(x)$是一个零次多项式，且$q_n(x)=a_0$。故

$$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n). \tag{6}$$

一方面，显然α_1，α_2，…，α_n是方程(1)的根；另一方向，除了这n个根外，由(6)式可见，$f(x)$没有其他根。于是得出下述关于方程根的个数的重要定理：

定理1 复数域上$n(n>0)$次方程有且仅有n个复根。

注意：定理1中根的个数是把重数也计算在，即k重根算成k个根。因此，定理1说明n次方程最多有n个不同的复根。

由定理1可直接推出以下结果：

推论1 实数域上n次方程最多有n个实根。

例1 求证$\sin x$不是多项式。

证明：由于$\sin x\neq0$，若$\sin x$是多项式，设其次数为n，

由定理1，$\sin x=0$根的个数（连重数在内）共有n个。但当$x=0$，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…时，都满足$\sin x=0$，这样的x有无穷多个，与定理1矛盾。所以$\sin x$不是多项式。

例2 证明恒等式：

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

其中a、b、c为不同的三个复数。

证明：设上式右端为$f(x)$，若$f(x)\neq 1$，那末$f(x)-1=0$至高是一个二次方程，最多有两个不同的复根。但a、b、c三个数显然都是方程$f(x)-1=0$的根，与定理1矛盾。

例3 证明多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$$

是有理数域上的不可约多项式，其中a_1，a_2，…，a_n是不同的整数。

证明：用反证法。若$f(x)$在有理域上可约，由§4.3定理1，可表$f(x)$为

$$f(x)=g(x)h(x).$$

其中$g(x)$与$h(x)$是次数低于n的整系数多项式。由于$f(a_i)=-1, i=1,2,\cdots,n$，而$g(a_i)h(a_i)=f(a_i)$，$g(a_i)$和$h(a_i)$都是整数，所以$g(a_i)$和$h(a_i)$只能是$\pm 1$，即

$$g(a_i)=1,\ h(a_i)=-1,$$

或 $$g(a_i)=-1,\ h(a_i)=1.$$

因而 $$g(a_i)+h(a_i)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

由于$g(x)$和$h(x)$的次数都低于n，而方程

$$g(x)+h(x)=0 \tag{7}$$

至少有n个根：$a_1, a_2, \cdots, a_n$，因而$g(x)+h(x)=0(x)$，这样就

有$f(x)=-[g(x)]^2$，但这是不可能的，因为$f(x)$首项系数为1，不是负数。

所以$f(x)$在有理数域上不可约。

二、代数基本定理的一些应用

根据因式定理，"α是$f(x)$的根"等价于"$(x-\alpha)|f(x)$"。因而，代数基本定理也可表为

定理2 每个次数为$n\geqslant 1$的复数域上的多项式至少有一个一次因式。

所以，凡是次数高于1次的多项式，在复数域上都可约。由此可得

推论2 复数域上的多项式当且仅当是一次多项式时不可约。

复数域上的不可约多项式，既然只能是一次多项式，因而可统一地写成$a(x-\alpha)$，这是因为一次式$ax+b$可以写成$a[x-(-\frac{b}{a})]=a(x-\alpha)$的形式。这里$a\neq 0, \alpha=-\frac{b}{a}$。根据因式分解定理（§4.2），复数域上$n$次多项式$f(x)$，必可唯一地（不计次序的不同）分解为：

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha^2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}. \qquad (8)$$

其中$l_1+l_2+\cdots+l_s=n$。

定理3 若α是实系数方程

$$f(x)=0 \qquad (9)$$

的虚根，则α的共轭复数$\overline{\alpha}$也是它的根，并且重数相同。即其虚根两两成对。

证明：设方程为

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{10}$$
其中a_0，a_1，…，a_n 为实数。由于α是(10)的根，所以
$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{11}$$
(11)式两端同时取共轭复数，则有
$$\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n}=\overline{0}=0. \tag{12}$$
由共轭的可分配性（§1.3推论5），(12)式化为
$$\overline{a_0\alpha^n}+\overline{a_1\alpha^{n-1}}+\cdots+\overline{a_n}=0,$$
$$\overline{a_0}\,\overline{\alpha}^n+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+\overline{a_n}=0. \tag{13}$$
由于a_0，a_1，…a_n是实数，(13)式化为
$$a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$
亦即$f(\overline{\alpha})=0$，$\overline{\alpha}$也是(9)的根。

由因式定理，若将$f(x)$看作复数域上的多项式，则有$(x-\alpha)|f(x)$，$(x-\overline{\alpha})|f(x)$，而$x-\alpha$与$x-\overline{\alpha}$互素，所以$f(x)$可被
$$g(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$$
整除。由共轭复数性质(§1.3推论1)知，$g(x)$的系数都是实数。设
$$f(x)=g(x)q(x),$$
则$q(x)$也是实系数多项式。

设α是$f(x)$的重根，则α也是$q(x)$的根，重复刚才的证明，又可知$\overline{\alpha}$是$q(x)$的根，即$\overline{\alpha}$也是$f(x)$的重根，进而断言其重数也相同。

证毕。

由定理3的证明过程又可以得到

定理4 若实系数方程$f(x)=0$有虚根$\alpha=a+bi(b\neq0)$，

则$x^2-2ax+a^2+b^2$是多项式$f(x)$在实数域上的因式。

注意：二次多项式$x^2-2ax+a^2+b^2$在实数域上是不可约的，因为它在复数域上的因式$x-\alpha$和$x-\overline{\alpha}$不是实数域上的多项式，由因式分解的唯一性，$x^2-2ax+a^2+b^2$不会有其它首项系数为1的因式。

定理5 实数域上不可约多项式有且仅有两种类型：(1) 一次多项式；(2) 满足$b^2-4ac<0$的二次多项式ax^2+bx+c。

证明：一次多项式显然是不可约的；二次多项式ax^2+bx+c在实数域上可约，当且仅当它可分解为两个实系数一次多项式的乘积，因而当且仅当它有实根，即等价于判别式$b^2-4ac\geqslant 0$。这就是说$ax^2+bx+c(a\neq 0)$在实数域上不可约当且仅当$b^2-4ac<0$。

由本节定理1，高于二次的实系数多项式$f(x)$（设次数为n）有且仅有n个复根（包括重数在内）。这n个根中若有实根，自然就说明$f(x)$在实数域上可约；若只有虚根，设α是一个虚根，由定理4知$x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$是$f(x)$的因式，从而断定$f(x)$在实数域上可约。

证毕。

由这个定理和因式分解定理可直接得以下定理。

定理6 任一次数为$n\geqslant 1$的实系数多项式，除因子先后顺序外，可唯一地表示为

$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$，其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_s$为实数，$k_1,\cdots,k_r$，$l_1,\cdots,l_s$为非负整数，$p_i^2-4q_i<0$，$i=1,\cdots,s$，

$k_1+\cdots+k_r+2l_1+\cdots+2l_s=n$。

例4 在复数域上分解多项式x^4+4为不可约多项式的乘积。

分析： 只须求出它的四个复根。

解： 令$x^2=y$，方程$x^4+4x^2+4=0$化为方程$y^2+4y+4=0$，解得$y=-2\pm\sqrt{4-4}=-2$。

由$x^2=-2$，得$x=\pm\sqrt{2}i$。

原方程的根为 $\sqrt{2}i$，$\sqrt{2}i$，$-\sqrt{2}i$，$-\sqrt{2}i$。

所以 $x^4+4x^2+4=(x-\sqrt{2}i)^2(x+\sqrt{2}i)^2$。

例5 已知方程$2x^3-9x^2+30x-13=0$有一个根$2-3i$，求解此方程。

分析： 这个方程的系数都是实数，根据本节定理2，其虚根成对，故$2+3i$也是它的根。因而〔$x-(2-3i)$〕〔$x-(2+3i)$〕整除$2x^3-9x^2+30x-13$，其商必为一次多项式。

解： 〔$x-(2-3i)$〕〔$x-(2+3i)$〕$=x^2-4x+13$。用它来除多项式$2x^3-9x^2+30x-13$得商$2x-1$。方程$2x-1=0$的根为$\frac{1}{2}$，故原方程共有三个根：

$$2+3i,\ 2-3i,\ \frac{1}{2}.$$

例6 试求方程

$$f(x)\equiv x^3+ix^2+(1-i)x-10-2i=0$$

的所有实根。

分析： 设a是此方程的一个实根，又设$\overline{f}(x)$是把多项式$f(x)$的系数换为其共轭复数的多项式，由于$\overline{f}(a)=\overline{f}(\overline{a})=\overline{f(a)}=0$，故$a$也是方程$\overline{f}(x)=0$的根。因此，$x-a$是$f(x)$和

$\overline{f}(x)$的公因式。

解：用辗转相除法，求出

$$f(x)=x^3+ix^2+(1-i)x-10-2i$$

与
$$\overline{f}(x)=x^3-ix^2+(1+i)x-10+2i$$

的最大公因式：

$$(\overline{f}(x),\ f(x))=x-2,$$

即 $f(x)=0$的实根为2。

例7 求含有根$1-i$和$2-i$的次数最低的复系数方程和实系数方程。

解：(1) 复系数方程为

$$[x-(1-i)][x-(2-i)]=0$$

或
$$x^2-(3-2i)x+(1-3i)=0.$$

(2) 含有根$1-i$和$2-i$的实系数方程，也必以共轭复数$1+i$和$2+i$为其根。因而最低次数的方程为

$$[x-(1-i)][x-(1+i)][x-(2-i)][x-(2+i)]=0.$$

或
$$x^4-6x^3+15x^2-18x+10=0.$$

习 题 5.1

1. 求证：

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

2. 证明：若使n次多项式$f(x)$与$g(x)$相等的复数自变量值多于n个，则$f(x)$和$g(x)$恒等。

3. 求证：$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$。

4. 求证拉格朗日(*Lagrange*)公式[注]：

注 *J.L.Lagrange* (1736—1813)，出生在意大利的数学家，后在法国，他在数学分析和代数方面贡献很大。

$$f(x)=f(a_1)\frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}$$

$$+f(a_2)\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}+\cdots$$

$$+f(a_n)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}.$$

其中$f(x)$的次数至多为$n-1$，a_1，$a_2,\cdots,a_n$为不同的数。

5．写出具有根1，2，3，4的4次方程。

6．试在复数域上分解以下多项式为不可约多项式的乘积：

（1）$x^3+6x^2+11x+6$；

（2）$x^4-10x+1$；

（3）x^4+4。

7．试在复数域上分解以下多项式为不可约多项式的乘积：

（1）$x^4-2x^3+4x^2+2x-5$；（2）x^4+x^2+1；

（3）$x^{2n}+x^n+1$；(4) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$。

8．试作次数最低的复系数方程，使其具有以下的根：

（1）1，1，2，3，$1+i$；

（2）-1，-1，-1，3，4。

9．试作次数最低的实系数方程，使其具有以下的根：

（1）1，1，2，3，$1+i$；

（2）i，i，$-1+i$。

10．方程$x^3-3x^2+4x-2=0$有一个根$1-i$，试求其它各根。

11．求证：实数域上的奇次方程（次数为奇数）至少有一个

实根。

§5.2 根与系数之间的关系

在初等代数中，我们学过一元二次方程根与系数的关系，设有一元二次方程

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0,\ (a_0\neq 0)$$

其根为α_1，α_2，则有

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{a_1}{a_0},\\ \alpha_1\alpha_2=\dfrac{a_2}{a_0}.\end{cases}$$

对于一元n次方程，根与系数之间有什么关系呢？这就是本节要研究的问题。

我们的讨论在复数域上进行。

设有一元n次方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{1}$$

其根为α_1，α_2，…，α_n，由§4.1定理1，

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\\&=a_0x^n-a_0(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+a_0(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\\&\quad\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)+\cdots+a_0(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.\end{aligned} \tag{2}$$

(1)、(2)对比系数，得以下等式组：

$$\begin{cases} a_1 = -a_0(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n), \\ a_2 = a_0(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n), \\ \cdots\cdots \\ a_n = a_0(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n. \end{cases} \qquad (3)$$

它表达了根与系数的关系。也可写成：

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ \alpha_1\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_2\alpha_n+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\dfrac{a_3}{a_0}, \\ \cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n = (-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{a_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases} \qquad (4)$$

上式说明，各根之和为$n-1$次项系数的反号除以首项系数；任意两根之积的和为$n-2$次项系数除以首项系数；任意三个根之积的和为$n-3$次项系数的反号除以首项系数；…；任意$n-1$个根乘积的和为一次项系数除以首项系数再乘以$(-1)^{n-1}$；最后，各根之积为常数项除以首项系数再乘以$(-1)^n$。

总之，各根任意k个$(1\leqslant k\leqslant n)$之积的和，等于$(-1)^k\cdot\dfrac{a_k}{a_0}$。这些关系式称为韦达（*Vieta*）注定理。

例1 试作一个首项系数为1的三次方程，使其根为2，-5，7。

分析： 由(3)式可得该三次方程的系数.根据根与系数的

注 *F.Vieta*（1540—1603），法国数学家。

关系，我们可以由已知的根构造方程。

解：
$$\begin{cases} 2+(-5)+7=4, \\ 2\cdot(-5)+2\cdot 7+(-5)\cdot 7=-31 \\ 2\cdot(-5)\cdot 7=-70. \end{cases}$$

即 $\frac{a_1}{a_0}=-4$，$\frac{a_2}{a_0}=-31$，$\frac{a_3}{a_0}=70$。

取$a_0=1$，得$a_1=-4$，$a_2=-31$，$a_3=70$。

所求的方程为 $x^3-4x^2-31x+70=0$。

例2 已知方程 $2x^3-9x^2+30x-13=0$有一个根为$2-3i$，求解此方程。

分析：方程的系数都是实数，由§5.1定理2，$2-3i$的共轭复数$2+3i$也是根，再设另一根为α，由三根之和为$\frac{9}{2}$可求出α。

解：由 $(2-3i)+(2+3i)+\alpha=\frac{9}{2}$，得

$$4+\alpha=\frac{9}{2}, \alpha=\frac{1}{2}.$$

注意：此问题也可以由三根之积为$\frac{13}{2}$求得。

例3 已知方程$x^3-2x^2-15x+36=0$有一个二重根，试解此方程。

分析：由于这个方程有一个二重根，另一个根必为单根。设这三个根分别为α，α，β，由根与系数的关系，可以求得α和β。

解：由于
$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta=2, \\ \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\beta=-15, \\ \alpha\cdot\alpha\cdot\beta=-36. \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=2, \\ \alpha^2+2\alpha\beta=-15, \\ \alpha^2\beta=-36. \end{cases}$$
将$\beta=2-2\alpha$代入第二个方程得
$$\alpha^2+2\alpha(2-2\alpha)=-15,$$
$$3\alpha^2-4\alpha-15=0,$$
解得 $\alpha=3$或$-\dfrac{5}{3}$。代入第三个方程验证，只有$\alpha=3$，$\beta=-4$适合。

所以这个方程的根为3，3，-4。

注意：本题也可以用求$f(x)$和$f'(x)$的最大公因式的方法，求出它的重根（见上一章）。

例4 已知方程
$$x^3-28x+48=0$$
的两根之差为2，求出其全部根。

解：设三个根为α，β，γ，则$\alpha-\beta=2$。由根与系数的关系，可列出关于α，β，γ的方程组：
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0, \\ \alpha-\beta=2, \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-28, \\ \alpha\beta\gamma=-48. \end{cases}$$
前两个方程相加，得$2\alpha+\gamma=2$。故

$$\gamma = 2 - 2\alpha.$$

由$\beta=\alpha-2$，代入第三个方程，有

$$\alpha(\alpha-2)+(\alpha-2)(2-2\alpha)+\alpha(2-2\alpha)=-28.$$

化简得 $\alpha^2-2\alpha-8=0$.

解得 $\alpha=1\pm3$，$\alpha=4$ 或 -2；

$\beta=2$ 或 -4；$\gamma=-6$ 或 6.

代入第四个方程，-2，-4，6 不适合；4，2，-6 适合，故方程的三个根是 4，2，-6.

例5 试作二次方程，使其根为方程

$$x^2+bx+c=0$$

的根的平方.

解：设此方程为$x^2+px+q=0$，则有

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=-p, \\ x_1^2x_2^2=q. \end{cases}$$

这里x_1,x_2为 $x^2+bx+c=0$ 的根.由根与系数的关系，有

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b, \\ x_1x_2=c. \end{cases}$$

而 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c$,

$x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=c^2$.

故 $-p=b^2-2c$，$p=2c-b^2$，$q=c^2$.

所以，所求的方程为

$$x^2+(2c-b^2)x+c^2=0.$$

注意：例2至例4中引用的方法，可能会引起这样一种猜想，即认为利用方程根与系数的关系来列方程组，会比直接解方程更简单，这是一种误会.比如解方程$x^3+ax^2+bx+c=0$，设其根为x_1，x_2，x_3，列方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b, \\ x_1x_2x_3=-c . \end{cases}$$

第一个方程乘以x_1^2，第二方程乘以$-x_1$，第三方程乘以1，相加，得$x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3-x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2x_3+x_1x_2x_3=-ax_1^2-bx_1-c$ 或 $x_1^3+ax_1^2+bx_1+c=0$。与原方程相同，所以丝毫不能代替解原来的三次方程．上面例题所用的方法，仅对方程根有某些特殊性质的情况才有效。

例6 求证：三次方程$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$的三根成等差数列的充要条件是$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$．

证明：必要性．若三根成等差数列，$\alpha-d$，α，$\alpha+d$，则$-a_1=(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=3\alpha$．因而$\alpha=-\dfrac{a_1}{3}$是原方程的根，代入后，得

$$\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3+a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right)+a_3=0,$$

$$-\frac{a_1^3}{27}+\frac{a_1^3}{9}-\frac{a_1a_2}{3}+a_3=0,$$

或 $$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0 .$$

充分性．若$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$成立，取$\alpha=-\dfrac{a_1}{3}$，

由于 $$\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3+a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right)+a_3$$
$$=27(2a_1^3-9a_1a_2+27a_3)=0,$$

故α是根．

设另外两根为β，γ，则

$$\alpha+\beta+\gamma=-a_1.$$

$$\beta+\gamma=-a_1-\left(-\frac{a_1}{3}\right)=-\frac{2}{3}a_1=2\alpha.$$

所以$\beta-\alpha=\alpha-\gamma$，即$\alpha$，$\beta$，$\gamma$成等差数列。

例7　若方程

$$x^3+px^2+qx+r=0\ (p\neq0)$$

的根成等比数列，求证$rp^3=q^3$。反之亦然。

证明：设这个方程的三个根为x_1，x_1t，x_1t^2，其和$x_1+x_1t+x_1t^2=-p$，两两之积的和$x_1(x_1t)+x_1(x_1t^2)+(x_1t)(x_1t^2)=q$，即得以下等式：

$$\begin{cases}x_1(1+t+t^2)=-p,\\ x_1^2t(1+t+t^2)=q.\end{cases}$$

由于$p\neq0$，用第一式除第二式，得

$$x_1t=-\frac{q}{p}.$$

故$-\dfrac{q}{p}$是原方程的根。因此

$$\left(-\frac{q}{p}\right)^3+p\left(-\frac{q}{p}\right)^2+q\left(-\frac{q}{p}\right)+r=0.$$

或　　$-q^3+p^2q^2-p^2q^2+rp^3=0$，$rp^3=q^3$。

反之，请读者自证。

习　题　5.2

1. 已知一个四次方程，其根为1，2，－1，－2，试写出这个方程。

2. 已知方程$x^3-x^2-8x+12=0$有两个根相等，求解此方程。

3.求作一个实系数的最低次方程，使其有根3和$2-i$。

4.已知方程$2x^3-3x^2-8x+12=0$的两个根互为相反数，求解此方程。

5.已知方程$2x^4-13x^3+26x^2-18x+4=0$有两个根互为倒数，求解此方程。

6.已知方程$8x^4+5x^2+2x+1=0$，求其根的平方和与立方和。

7.设方程$x^2-x+a=0$的根为x_1，x_2，当a为何值时$x_1^2+x_2^2=\frac{13}{9}$?

8.λ为何值时，方程$x^3+x^2+2x+\lambda=0$的根成等比数列?

9.设方程$x^3+2x^2-x+8=0$的三个根为α_1，α_2，α_3.求以$\frac{1}{\alpha_1}$，$\frac{1}{\alpha_2}$，$\frac{1}{\alpha_3}$为根的三次方程。

10.已知方程 $2x^5-7x^4+8x^3-2x^2+6x+5=0$的两个根为$2-i$和$i$，试求其余各根。

11.若$x^3+ax^2+bx+c=0$有一个非零的重根，试证：

$$4(b^2-3ac)(a^2-3b)=(9c-ab)^2.$$

12.设 ε_0，ε_1，…，ε_{n-1}是全部n次单位根，求证：

$$\begin{cases}\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0,\\ \varepsilon_0\varepsilon_1+\varepsilon_0\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ \varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-2}+\cdots+\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{n-1}=0,\\ \varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}=(-1)^{n-1}.\end{cases}$$

13.若方程$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$的四个根中，有两

个根的和等于另外两根的和，求证：$p^3-4pq+8r=0$。

§5.3 方程的变换

设有两个n次方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n=0, \tag{1}$$

$$g(y)\equiv b_0y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_{n-1}y+b_n=0, \tag{2}$$

它们在复数域中各有n个根(包括重根)。如果它们的根之间有一定的关系，那末这两个方程的系数有什么关系呢？

问题也可以从另一个角度提出：

已知方程(1)，求作一个同次方程(2)，使其根与(1)的根之间有确定的关系。

这类问题统称为方程的变换，在研究方程和解方程时经常用到。下面，我们讨论几个基本的情况。

一、根反号变换

问题：已知方程(1)的根为α_1，α_2，…，α_n，求作新方程，使其根为$-\alpha_1$，$-\alpha_2$，…，$-\alpha_n$。

令$x=-y$，代入方程(1)，得方程

$$a_0(-1)^ny^n+a_1(-1)^{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_n=0。 \tag{3}$$

显然，若α是方程(1)的根，则$-\alpha$是方程(3)的根；若β是(3)的根，则$-\beta$是(1)的根，即方程(3)的根与方程(1)的根反号。方程(3)也可写成

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n=0。$$

其系数与原方程系数之间的关系是：从首项开始，隔项变号。

例1 试求一方程，其根与方程

$$2x^7+3x^6-4x^4-3x^2+3x+1=0$$

的根符号相反。

解：根据上述结论，作方程

$$2x^7-3x^6+4x^4+3x^2+3x-1=0,$$

其根与原方程根符号相反。

注意：方程中的缺项(如本例的5次项及3次项)，应算在内。

例2 试求一方程，使其根与方程

$$3x^4-1=0$$

的根符号相反。

解：原方程可写作

$$3x^4+0x^3+0x^2+0x-1=0.$$

新方程应为$3x^4-0x^3+0x^2-0x-1=0$，故仍是原方程 $3x^4-1=0$。

二、根乘数变换

问题：已知方程(1)的根为α_1，α_2，…，α_n，求作新方程，使其根为$k\alpha_1$，$k\alpha_2$，…，$k\alpha_n$，其中$k\neq 0$。

令$x=\dfrac{y}{k}$，代入方程(1)，得方程

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

用k^n乘上式两端，化为

$$g(y)\equiv a_0y^n+ka_1y^{n-1}+\cdots+k^na_n=0. \tag{4}$$

若α是方程(1)的根，即$f(\alpha)=0$，或

$$f\left(\frac{k\alpha}{k}\right)=0,\quad \frac{1}{k^n}g(k\alpha)=0,$$

亦即$g(k\alpha)=0$，$k\alpha$是(4)的根。

反之，若β是(4)的根，$g(\beta)=0$，或

$$\frac{1}{k^n}g(\beta)=0,\quad f\left(\frac{\beta}{k}\right)=0,$$

所以$\frac{\beta}{k}$是(1)的根。

总之，方程(4)的根是方程(1)的根的k倍，其系数$b_j=k^ja_j(j=0,1,\cdots,n)$。

例3 求作一方程，使其根为方程

$$x^5-4x^4+x^3+3x^2+2x-5=0$$

的根的二倍(即作根乘数2的变换)。

解：由上述结论，得知新方程各系数依次为：1，$(-4)\cdot2$，$1\cdot2^2$，$3\cdot2^3$，$2\cdot2^4$，$(-5)\cdot2^5$，即1，-8，4，24，32，-160。所以新方程是

$$y^5-8y^4+4y^3+24y^2+32y-160=0.$$

例4 求作一方程，使其根为方程

$$x^4+4x^3-4x^2+8x+32=0$$

的根的$-\frac{1}{2}$倍(即作根乘数$-\frac{1}{2}$的变换)。

解：新方程的系数依次为：

$$1,\ 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),\ (-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2,\ 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\ 32\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4,$$

亦即1，-2，-1，-1，2。因而新方程是

$$y^4-2y^3-y^2-y+2=0.$$

例5 设有方程 $3x^3+4x^2-5x+6=0$，试作一个整系数方程，使其根为此方程根的倍数，且使首项系数为1。

解：作根乘数k的变换，原方程化为

$$3y^3+4ky^2-5k^2y+6k^3=0,$$

或 $$y^3+\frac{4}{3}ky-\frac{5}{3}k^2y+2k^3=0.$$

为使其系数为整数，只须取k为3的倍数。例如取$k=3$，得方程

$$y^3+4y^2-15y+54=0.$$

三、根平移变换

问题：已知方程(1)的根为α_1，α_2，…，α_n，求作一个新的方程，使其根为α_1-c，α_2-c，…，α_n-c，其中c为常数。

多项式$f(x)$按$x-c$的方幂展开(见§2.6)：

$$f(x)=b_0(x-c)^n+b_1(x-c)^{n-1}+\cdots+b_0.$$

这时方程(1)化为与之等价的方程

$$b_0(x-c)^n+b_1(x-c)^{n-1}+\cdots+b_0=0. \tag{5}$$

则方程

$$b_0y^n+b_1y^{n-1}+\cdots b_n=0 \tag{6}$$

就是所求的方程。

事实上，若α是（1）的根，则α也满足方程（5），即$b_0(\alpha-c)^n+b_1(\alpha-c)^{n-1}+\cdots+b_0=0$，就是说$\alpha-c$是(6)的根。

反之，设β是(6)的根，则

$$b_0\beta^n + b_1\beta^{n-1} + \cdots + b_n = 0 .$$

那末就有

$$b_0[(\beta+c)-c]^n + b_1[(\beta+c)-c]^{n-1} + \cdots b_n = 0 .$$

也就是说$\beta+c$是(5)的根，因而是(1)的根。

所以，根平移变换可通过对$x-c$的方幂展开来实现。

例6 求作一个方程，使其根为方程

$$f(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

的根减1（即作根平移变换）。

解：$f(x)$按$x-1$的方幂展开，其系数可用连续综合除法求得：

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & -3 & 4 \\
1 & & 1 & 3 & 0 \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & 4 \\
 & & 1 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \\
 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & & \\
\hline
\end{array}$$

所以，新方程为 $y^3 + 5y^2 + 4y + 4 = 0$。

例7 试将方程

$$f(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 2x + 1 = 0$$

作根的平移变换，使其三次项系数化为0。

解：假定作根平移变换$y = x - c$（c待定），也就是说，用$x = y + c$代入原方程，这时，应有 $(y+c)^4 + 4(y+c)^3$

$+2(y+c)+1=0$,　　或　　$y^4+(4c+4)y^3\cdots\cdots=0$。
由三次项系数$4c+4=0$，得$c=-1$。

$f(x)$按$x+1$的方幂展开，其系数由下列综合除法求得：

	1	4	0	2	1
-1		-1	-3	3	-5
	1	3	-3	5	-4
		-1	-2	5	
	1	2	-5	10	
		-1	-1		
	1	1	-6		
		-1			
	1	0			

因此，新方程为$x^4-6x^2+10x-4=0$。

四、根倒数变换

问题：已知方程(1)的根为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$，求作新方程，使其根为$\dfrac{1}{\alpha_1}$，$\dfrac{1}{\alpha_2}$，…，$\dfrac{1}{\alpha_n}$（这里要假定$f(x)$的常数项$a_n\neq0$，以保证各$\alpha_i$均不为零）。

令$x=\dfrac{1}{y}$，代入(1)，得$f\left(\dfrac{1}{y}\right)=0$，或

$$a_0\left(\frac{1}{y}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)+a_n=0,$$

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0 . \tag{7}$$

若α是(1)的根，则$\dfrac{1}{\alpha}$是(7)的根；反之，设β为(7)的根，则$\dfrac{1}{\beta}$为（1）的根。

方程（7）即所求的方程。

因而新方程是原方程系数全部颠倒顺序得到的。

例8 作一方程，使其根为方程

$$15x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 21x + 13 = 0$$

的根的倒数（即将其进行根倒数变换）。

解：由上述可知，新方程为

$$13y^4 - 21y^3 + 11y^2 - 2y + 15 = 0 .$$

例9 作一个方程，使其根为方程

$$3x^3 + 2x^2 - 2x + 11 = 0 \tag{8}$$

的根之倒数减2。

分析：分作两步：先作根倒数变换，再作根平移变换。

解：(8)经根倒数变换，化为$11y^3 - 2y^2 + 2y + 3 = 0$。

	11	−2	2	3
2		22	40	84
	11	20	42	87
		22	84	
	11	42	126	
		22		
	11	64		

再作根平移变换，通过按$y-2$的方幂展开，得到新的方程：（算式见上页）

$$11z^3+64z^2+126z+87=0.$$

例10　作一方程，使其根为方程

$$3x^3+2x^2-2x+11=0$$

的根的负倒数。

分析：分作两步：先作根倒数变换，再作根反号变换。

解：利用根倒数变换，先得方程

$$11y^3-2y^2+2y+3=0.$$

再作根反号变换，最后得新方程

$$11z^3+2z^2+2z-3=0.$$

习　题 5.3

1.作一方程，使其根为方程

$$2x^5+4x^4-x^3+2x^2-x-1=0$$

的根的反号。

2.求证：方程

$$7x^8-5x^6-3x^4+x^2+2=0$$

的根可分成 4 对，每对根之和为 0 .

3.作一方程，使其根为方程

$$2x^5-x^3-4x^2+8=0$$

的根的(1)　-2 倍；(2)　$\frac{1}{2}$倍。

4.试将方程

$$108x^3-270x^2-42x+1=0$$

经根乘数变换化为首项系数为1的整系数方程。

5.试将方程

$$10x^4-6x^2+7x-\frac{1}{10}=0$$

经根乘数变换化为首项系数为1的整系数方程。

6.已知方程

$$\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{4}x^3-x+\frac{1}{6}=0,$$

试写出一个整系数方程，其根为上述方程根的反号。

7.试求根为方程$x^n-1=0$的根k倍的n次方程。

8.作一方程，使其根为方程

$$3x^5+2x^3-2x^2-x-1=0$$

的根减1。

9.利用根平移变换，消去三次方程

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

的二次项系数。

10.试作一方程，其根为方程

$$2x^4+x^3+x^2-2x-4=0$$

的根的倒数。

11.试作一方程，其根为方程

$$2x^4-5x^3+4x^2-2x-1=0$$

的根的倒数的2倍。

12.求证：若方程

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

的三个根之倒数成等差数列，则有

$$27r^2-9pqr+2q^3=0.$$

§5.4 三次方程

代数基本定理只告诉我们根的存在，并没有告诉我们怎样求根．在中学时，我们学过一元二次方程的求根公式，就是用系数经加、减、乘、除及开方运算求根的表达式．人们不禁要问，高于二次的方程有没有求根公式？这个问题说来话长，让我们先谈几句这方面的历史．

1545年意大利米兰的数学家卡当（*Cardan*，当时他是一个医生）在其著作里，首先发表了三次方程的求根公式（这个方法实际上是由当时意大利的威尼斯计算师塔尔塔利亚（*Tartaglia*）得到的）．接着，卡当的学生意大利数学家费拉里（*Ferrari*）给出了四次方程的求根公式．

随后，人们以大量精力和时间投入五次方程求根公式的研究．这个问题花费了近三百年的时间，直到十九世纪二十年代，由于挪威青年数学家阿贝尔（*Abel*）的重大贡献才算告一段落．阿贝尔证明了次数$\geqslant 5$的方程没有一般的求根公式．但是，这并不排除个别的五次或更高次方程用根式求解的可能性．如方程$x^5-1=0$就可以用根式求解，即$x=\sqrt[5]{1}$．而方程$x^5-4x+2=0$却不能用根式求解．一个具体的n次方程能否用根式求解的问题，由法国青年数学家伽罗华（*Galois*）最后解决．二十一岁去世的伽罗华，在其短暂的一生中对数学的贡献是划时代的，他找到了方程的根可由系数经加、减、乘、除、开方运算表示出来的充分必要条件．伽罗华应用的工具是群论，我们在这里暂时不能讨论它．

下面我们介绍三次方程的卡当解法．先考虑一种特殊类型的三次方程，然后过渡到一般的三次方程。

一、缺二次项的三次方程

方程

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

的系数p和q为复数，二次项系数为零，是“不完全”的三次方程。

下面我们讨论方程(1)的解法。

根据代数基本定理，这个方程有三个复根．设x_0是(1)的一个根，卡当解法是假定x_0分解为两个复数α与β的和：

$$x_0=\alpha+\beta,$$

然后分别求出α和β来，相加便得到方程(1)的解。下面我们把这个过程详细地讲一下。

首先，把上式代入(1)中，得

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0,$$

展开整理后，得

$$\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+p(\alpha+\beta)+q=0,$$

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0. \tag{2}$$

满足(2)式的α，β仍不能直接求得，我们可以对α和β加上一个限制条件，使(2)简化。

让α和β满足

$$3\alpha\beta+p=0,\ 即\alpha\beta=-\frac{p}{3}. \tag{3}$$

这样一来，方程(2)化为方程

$$\alpha^3+\beta^3+q=0,$$

即 $$\alpha^3+\beta^3=-q.$$

又因 $\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3=-\frac{p^3}{27}$. 由韦达定理，$\alpha^3$ 和β^3是方程

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \tag{4}$$

的两个根。

方程(4)的系数都是已知的，由一元二次方程求根公式，方程(4)的解是

$$z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad z_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{5}$$

设z_1的三次方根为α_1，α_2，α_3，而z_2的三次方根为β_1，β_2，β_3。则$\alpha_i+\beta_j$共有$3\times3=9$种搭配方式。显然，这9个数不会全是原方程的根，因为三次方程只能有三个根，这三个根包括在那9个数中，而且必须满足等式(3)。

实际上，求原方程的根并不需要计算这9个数，我们可以从z_1的一个三次方根入手，进而求得方程的全部根。

假定$p\neq0$（对于$p=0$的情况，方程$x^3+q=0$的解就是$-q$的三次方根，不需要另外讨论），由此可以保证$z_1\cdot z_2=-\frac{p^3}{27}\neq0$，即$z_1\neq0$，$z_2\neq0$。

任取z_1的三次方根α_1，因而$\alpha_1\neq0$。令

$$\beta_1=-\frac{p}{3\alpha_1},$$

则 $$(\beta_1)^3=\left(-\frac{p}{3\alpha_1}\right)^3=\left(-\frac{p^3}{27}\right)\div\alpha_1^3=\left(-\frac{p^3}{27}\right)\div z_1,$$

所以 $\beta_1^3 = z_2$。（因$z_1 z_2 = -\frac{p^3}{27}$）

β_1是z_2的三次方根，而且α_1与β_1满足（3）。

有了α_1，z_1的其他两个三次方根就可以用α_1和三次单位根表示出来：

$$\alpha_2 = \alpha_1 \varepsilon_1,\quad \alpha_3 = \alpha_1 \varepsilon_1^2.$$

其中 $\varepsilon_1 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$和 $\varepsilon_1^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = \varepsilon_2$是三次原根。下面直接用$\varepsilon$代替$\varepsilon_1$。

z_2的另外两个三次方根可由α_2、α_3根据（3）求出：

$$\beta_2 = \frac{-p}{3\alpha_2} = \frac{-p}{3\alpha_1 \varepsilon} = \beta_1 \varepsilon^2,\ （因\ \varepsilon^3 = 1）$$

$$\beta_3 = \frac{-p}{3\alpha_3} = \frac{-p}{3\alpha_1 \varepsilon^2} = \beta_1 \varepsilon.$$

因此，$x_1 = \alpha_1 + \beta_1$，$x_2 = \alpha_1 \varepsilon + \beta_1 \varepsilon^2$，$x_3 = \alpha_1 \varepsilon^2 + \beta_1 \varepsilon$是原方程（1）的解。

解三次方程（1）的步骤可总结如下：

1. 解二次方程

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad （假定p \neq 0），$$

只须求出一个解，设为z_1；

2. 求出z_1的任意一个三次方根，设为α_1；

3. 计算α_2，α_3：$\alpha_2 = \alpha_1 \varepsilon$，$\alpha_3 = \alpha_1 \varepsilon^2$；

4. 计算β_1，β_2 β_3：$\beta_i = \frac{-p}{3\alpha_i}$，$i = 1, 2, 3$；

5. 原方程（1）的解为：

$x_1 = \alpha_1 + \beta_1$，$x_2 = \alpha_2 + \beta_2$，$x_3 = \alpha_3 + \beta_3$。

例1 解方程 $x^3-9x+28=0$。

解：(1) 由$p=-9$，$q=28$，相应的二次方程是 $z^2+28z+27=0$。解得$z_1=-1$；

(2) 任取z_1的一个三次方根$\alpha_1=-1$；

(3) $\alpha_2=\alpha_1\varepsilon=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$，$\alpha_3=\alpha_1\varepsilon^2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$；

(4) $\beta_1=-\dfrac{p}{3\alpha_1}=-\dfrac{(-9)}{3\cdot(-1)}=-3$，

$$\beta_2=-\frac{p}{3\alpha_2}=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\beta_3=-\frac{p}{3\alpha_3}=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i;$$

(5) $x_1=\alpha_1+\beta_1=(-1)+(-3)=-4$，

$$x_2=\alpha_2+\beta_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}=2+\sqrt{3}i,$$

$$x_3=\alpha_3+\beta_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}=2-\sqrt{3}i.$$

注意：若不是由α_i来确定β_i，而通过对z_2开立方来求β_i，则必须用(3)式来检验，否则得到的$\alpha_i+\beta_i$可能不是方程的根。如$-1+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+3\sqrt{3}i}{2}$就不是根。而用上述步骤1—5不会出现这种问题。

二、一般三次方程

设有一般三次方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \tag{6}$$

我们希望把它转化为缺二次项的三次方程，这可以通过根平移变换（见§5.3）达到。

取$x=y+d$（d为待定常数），代入(6)，得

$$(y+d)^3+a(y+d)^2+b(y+d)+c=0,$$

展开整理，得

$$y^3+(3d+a)y^2+(3d^2+2ad+b)y+(d^3+ad^2+bd+c)=0, \quad (7)$$

显然，为了使二次项系数为零，只须让$d=-\frac{a}{3}$。由此可得

$$3d^2+2ad+b=-\frac{a^2}{3}+b,$$

$$d^3+ad^2+bd+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.$$

因而令

$$p=-\frac{a^2}{3}+b, \quad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c, \quad (8)$$

则方程(6)化为

$$y^3+py+q=0, \quad (9)$$

成为缺二次项的方程。

总之，对于一般类型的三次方程，应先利用(8)化为缺二次项的三次方程(9)，再按本节第一部分介绍的方法，计算(9)的三个根y_1，y_2和y_3，最后，根据$x=y-\frac{a}{3}$，得出原方程的根x_1，x_2及x_3。

下面，通过具体例子，说明求解步骤。

例2 解方程 $x^3+3x^2+27x-31=0$。

解：(1) 把原方程化为缺二次项的方程。

$a=3, b=27, c=-31$，作变量代换：

$x=y-\frac{a}{3}=y-1$，利用公式(8)，$p=-\frac{a^2}{3}+b=24$，

$q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=-56$。故方程化为

$$y^3+24y-56=0。$$

(2) 求z_1。

$$z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$=-\frac{-56}{2}+\sqrt{\frac{(-56)^2}{4}+\frac{24^3}{27}}=64。$$

(3) 求α。$\alpha_1=4$，$\alpha_2=4\varepsilon$，$\alpha_3=4\varepsilon^2$。

(4) 求β。

$$\beta_1=-\frac{p}{3\alpha_1}=-2, \beta_2=-\frac{p}{3\alpha_2}=-2\varepsilon^2,$$

$\beta_3=-\frac{p}{3\alpha_3}=-2\varepsilon$。

(5) 求y。

$$y_1=\alpha_1+\beta_1=4-2=2,$$

$$y_2=\alpha_2+\beta_2=4\varepsilon-2\varepsilon^2=-1+3\sqrt{3}i,$$

$$y_3=\alpha_3+\beta_3=4\varepsilon^2-2\varepsilon=-1-3\sqrt{3}i。$$

(6) 求x。

$x_1=y_1-1=2-1=1$，　$x_2=y_2-1=-2+3\sqrt{3}i$，
$x_3=y_3-1=-1-3\sqrt{3}i-1=-2-3\sqrt{3}i$。

例3 解方程　$x^3+3x^2-21x-55=0$。

解：(1) 由$a=3$，$b=-21$，$c=-55$，应取变量代换 $x=y-\frac{a}{3}=y-1$，得

$$p=-\frac{a^2}{3}+b=-3-21=-24,$$

$$q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=2+21-55=-32,$$

化为方程 $y^3-24y-32=0$。

（2） $z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

$$=16+16i=16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

（3） $\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),k=0,1,2.$$

$$\alpha_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\alpha_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\alpha_3=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

（4） $\beta_1=-\frac{p}{3\alpha_1}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$

$$\beta_2=-\frac{p}{3\alpha_2}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\beta_3=-\frac{p}{3\alpha_3}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}-i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

（5） $y_1=\alpha_1+\beta_1=4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=2+2\sqrt{3},$

$$y_2=\alpha_2+\beta_2=4\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=-4,$$

$$y_3=\alpha_3+\beta_3=4\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}=2-2\sqrt{3}.$$

(6) $x_1=y_1-1=1+2\sqrt{3}$,

$x_2=y_2-1=-5$,

$x_3=y_3-1=1-2\sqrt{3}$.

*三、三次方程的讨论

一般的三次方程既然都可以化为缺二次项的三次方程，因此，只须讨论方程(1)。

我们的讨论分两部分，一是三次方程有重根的条件，二是实系数三次方程的性质。

定理1 方程$x^3+px+q=0$有重根当且仅当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$。

证明： 设$f(x)=x^3+px+q$，$f'(x)=3x^2+p$，由§4.4定理3，$f(x)$有重根当且仅当$f(x)$与$f'(x)$不互素。先假定$p\neq 0$，进行辗转相除：

	$(f(x))$	$(f'(x))$	
	x^3+px+q	$3x^2+p$	
	$\times 3)$	$\times 2p)$	
x	$3x^3+3px+3q$	$6px^2+2p^2$	$3x$
	$3x^3+px$	$6px^2+9qx$	
	$2px+3q$	$-9qx+2p^2$	
	$(r_1(x))$	$\times 2p)$	
		$-18pqx+4p^3$	$-9q$
		$-18pqx-27q^2$	
		$4p^3+27q^2$	
		$(r_2(x))$	

$r_2(x)=4p^3+27q^2=108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$。显然，$f(x)$与$f'(x)$不互素当且仅当$r_2(x)=0(x)$，或$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$。而当$p=0$时，方程$x^3+q=0$有重根等价于$q=0$，因而也等价于$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$。

证毕。

下面讨论实系数三次方程。

设有方程

$$x^3+px+q=0, \tag{10}$$

其中p，q为实数，且$q\neq 0$，我们将根据$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$的符号来考查它的根的性质。

1. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$。

这时，求根公式(5)的平方根下是一个正实数，开方后是一对相反的实数。因而z_1有一个实立方根，设为α_1，则

$$\alpha_1\varepsilon=\frac{-\alpha_1+\alpha_1\sqrt{3}i}{2},\ \alpha_1\varepsilon^2=\frac{-\alpha_1-\alpha_1\sqrt{3}i}{2}$$

是z_1的另外两个立方根，它们是一对共轭复数。$\beta_1=-\frac{p}{3\alpha_1}$也是实数（由于$q\neq 0$，所以$\alpha_1\neq 0$），

$$\beta_2=-\frac{p}{3\alpha_2}=-\frac{p}{3\alpha_1\varepsilon}=\beta_1\varepsilon^2,$$

$$\beta_3=-\frac{p}{3\alpha_3}=-\frac{p}{3\alpha_1\varepsilon^2}=\beta_1\varepsilon.$$

所以，$x_1=\alpha_1+\beta_1$是实数；$x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2$

$$=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\beta_1);$$

$$x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon=-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\beta_1).$$

下面证明x_2和x_3都是虚数，即虚部不为零。

事实上，若虚部为零，则必然有$\alpha_1=\beta_1$，由于$\alpha_1^3=z_1$，$\beta_1^3=z_2$，因而就有$z_1=z_2$；但$z_1-z_2=2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\neq0$，得到矛盾。说明$x_2$和$x_3$虚部不为零，且$x_2$和$x_3$实部相等，虚部系数刚好反号，所以$x_2$和$x_3$是一对共轭虚数。

因此，对于情况1，方程(10)有一个实根和一对共轭虚根。

2. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$.

这时，根据求根公式(5)，$z_1=z_2=-\frac{q}{2}$.

设α_1是z_1的实立方根，$\beta_1=\frac{-p}{3\alpha_1}$，故$\beta_1$是实数，所以$\alpha_1=\beta_1$（因为它们都是$-\frac{q}{2}$的实立方根），

$$\alpha_2=\alpha_1\varepsilon,\quad \beta_2=\beta_1\varepsilon^2,$$
$$\alpha_3=\alpha_1\varepsilon^2,\quad \beta_3=\beta_1\varepsilon.$$

于是得

$$x_1=\alpha_1+\beta_1=2\alpha_1,$$
$$x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha_1,$$
$$x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon=\alpha_1(\varepsilon^2+\varepsilon)=-\alpha_1.$$

（因为$\varepsilon+\varepsilon^2=-1$）

所以当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$时，方程的三个根都是实数，并且有两个根相等。

3．$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$。

这时，求根公式(5)的平方根下是一个负实数$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$。因而$z_1$和$z_2$都是虚数，$z_1$和$z_2$的立方根中不可能有实数。

设$\alpha=u+vi$是z_1的任一立方根(u，v为实数)，再设$\beta=\frac{-p}{3\alpha}=\frac{-p}{3(u+vi)}=\frac{-p(u-vi)}{3(u^2+v^2)}$。

下面证明$\frac{-p}{3(u^2+v^2)}=1$。

事实上，由于z_1和z_2共轭，即$z_1=\alpha^3=(u+vi)^3$与$z_2=\beta^3=\left(\frac{-p}{3(u^2+v^2)}\right)^3(u-vi)^3$共轭；

另一方面，$\overline{(u+vi)^3}=\overline{(u+vi)}^3=(u-vi)^3$，由于共轭数的唯一性，必有

$$\left(\frac{-p}{3(u^2+v^2)}\right)^3(u-vi)^3=(u-vi)^3.$$

显然$\alpha=u+vi\neq0$，故$u-vi\neq0$。上式两端约去$(u-vi)^3$，得$\left(\frac{-p}{3(u^2+v^2)}\right)^3=1$，因而$\frac{-p}{3(u^2+v^2)}=1$。

由此得知

$$\beta=\frac{-p}{3(u^2+v^2)}(u-vi)=u-vi$$

是$\alpha=u+vi$的共轭复数，所以$x=\alpha+\beta$是一个实数。上述α是

z_1的任一立方根，故z_1的三个立方根都具有同样的性质，即方程(10)的三个根都是实数。而因$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\neq 0$，根据本节定理1，方程(10)没有重根，也就是说，这时三个实根互不相同。

实系数三次方程根的三种情形，可归纳如下：

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$	方程根的性质 ($q\neq 0$)
>0	一个实根，一对共轭虚根
$=0$	一个单实根及一个二重实根
<0	三个不同的实根

习 题 5.4

1. 解下列三次方程

(1) $x^3-2x+4=0$；　(2) $x^3-3x-2=0$；

(3) $x^3-7x+6=0$；　(4) $4x^3-3x-1=0$；

(5) $x^3-6x^2+11x-6=0$；

(6) $x^3-6x^2+57x-196=0$；

(7) $x^3-x^2-3x-1=0$.

2. 设x_1，x_2，x_3是三次方程

$$x^3+px+q=0$$

的根，证明$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27q^2-4p^3$。

3. 求证：方程

$$x^3+2x^2+3x+4=0$$

没有正实根。

4．求证：方程

$$x^3-2x^2+3x-4=0$$

没有负实根．

5．实三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$ 当$b>\frac{a^2}{3}$时无重根．证明之．

§5.5 四次方程

下面介绍四次方程的费拉里(Ferrari)解法．这个解法的基本思想是把一个四次多项式分解为两个二次三项式的乘积，因而可把四次方程分为两个二次方程．

设有复系数四次方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{1}$$

为了把左端化为两个二次式的积，下面设法将（1）的左端表为两个多项式的平方差．为了以头两项为基础进行配方，就要加上再减去$\left(\frac{a}{2}x\right)^2$．这样，得

$$[x^4+ax^3+(\frac{a}{2}x)^2]-(\frac{a}{2}x)^2+bx^2+cx+d=0,$$

$$(x^2+\frac{a}{2}x)^2-[(\frac{a^2}{4}-b)x^2-cx-d]=0. \tag{2}$$

上式第一部分是完全平方，第二部分怎样化成完全平方呢？设想把第一个括号内加上一个待定常数t，即形如$(x^2+\frac{a}{2}x+t)^2$．于是，必须在上式左端加上并减去$2(x^2+\frac{ax}{2})t+t^2$．

这时第二部分也包含了待定常数t，适当选择t，使第二部分成为完全平方。

经过这一变化，原方程左端化为

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+t\right)^2-2\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)t-t^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d\right]$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+t\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}-b+2t\right)x^2+(at-c)x+(t^2-d)\right].$$

问题归为选择参数t，使上式右端方括号里的多项式构成完全平方。方括号内的多项式是二次三项式。我们知道，二次三项式构成完全平方的充要条件是其判别式等于零，这时判别式是含有t的表达式：

$$(at-c)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+2t\right)(t^2-d)=0. \qquad (3)$$

展开括号，加以整理，得出t的三次方程：

$$8t^3-4bt^2+(2ac-8d)t+(4bd-a^2d-c^2)=0. \qquad (4)$$

方程（4）称为方程（1）的予解方程，意思是说，为了解方程（1），须先解方程（4）。三次方程的解法刚刚学过，假定t_0是（4）的一个根（这时不需要把三个根都求出来，只要知道一个根就够了），因为t_0也满足（3）式，故应有

$$(at_0-c)^2=4\left(\frac{a^2}{4}-b+2t_0\right)(t_0^2-d),$$

或者

$$at_0-c=2\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}\cdot\sqrt{t_0^2-d}. \qquad (5)$$

（注意：这里根号指复数开方，不是指算术根）

因此，原方程左端可化为

$$(x^2+\frac{a}{2}x+t_0)^2-\left[\left(\frac{a}{4}-b+2t_0\right)x^2+(at_0-c)x\right.$$

$$\left.+(t_0^2-d)\right]=(x^2+\frac{a}{2}x+t_0)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}\,x\right.$$

$$\left.+\sqrt{t_0^2-d}\right)^2.$$

原方程化为两个二次方程：

$$x^2+\frac{a}{2}x+t_0+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}\,x+\sqrt{t_0^2-d}=0,$$

$$x^2+\frac{a}{2}x+t_0-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}\,x-\sqrt{t_0^2-d}=0.$$

整理后，得

$$x^2+\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}\right)x+(t_0+\sqrt{t_0^2-d})=0,\quad(6)$$

$$x^2+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}\right)x+(t_0-\sqrt{t_0^2-d})=0.\quad(7)$$

（6）、（7）两个方程根的总体就是原方程（1）的全部根。

（6）和（7）中除了t_0之外，其它系数都是原方程的系数，因此，求出一个t_0后，就可直接写出这两个二次方程。但是这里有两个根号，都是复数开方，各有两个方根，若没有限制条件，就有$2\times2=4$种搭配方式。（6）和（7）式只用到两种搭配方式，那末，怎样进行搭配呢？判定搭配的标准就是（5）式。我们可以只求一个方根，如$\sqrt{t_0^2-d}$的一个方根，根据（5）式，只要$t_0^2-d\neq0$，则由

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}=\frac{at_0-c}{2\sqrt{t_0^2-d}}$$

就唯一地确定了$\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2t_0}$所应取的值。这样做，不仅

不会搭配错，而且省去了一个开方运算。

下面，把四次方程的解法总结一下。

1.由原方程系数组成予解方程：

$8t^3-4bt^2+(2ac-8d)t+(4bd-a^2d-c^2)=0$；

2.求出予解方程的一个根t_0；

3.求出$\sqrt{t_0^2-d}$的一个方根，设为g；

4.算出$h=\dfrac{at_0-c}{2g}$（假定$g\neq 0$），注

5.解以下两个二次方程：

$$x^2+\left(\frac{a}{2}+h\right)x+(t_0+g)=0,$$

$$x^2+\left(\frac{a}{2}-h\right)x+(t_0-g)=0.$$

其根的总体即原方程的全部根。

例1 解四次方程

$$x^4+x^2+4x-3=0.$$

解：（1） $a=0$，$b=1$，$c=4$，$d=-3$.予解方程为

$$8t^3-4t^2+24t-28=0,$$

或 $2t^3-t^2+6t-7=0$.

（2） 易见$t_0=1$是予解方程的一个根。

（3） $\sqrt{t_0^2-d}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=\pm 2$，取$g=2$.

（4） $at_0-c=-4$，$h=\dfrac{at_0-c}{2g}=\dfrac{-4}{4}=-1$.

（5） 解二次方程

$$x^2-x+3=0,$$

注 若$g=$ ，取h为$\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-b+2t_0}$的任一方根，转入5.

$$x^2+x-1=0.$$

即得原方程的四个根：

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-3}=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

习　题 5.5

1. 解下列四次方程：

(1)　$x^4-4x^3-24x^2+56x+52=0$；

(2)　$3x^4-40x^3+130x^2-120x+27=0$；

(3)　$x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$；

(4)　$x^4-4x^3+5x^2-2x-6=0$；

(5)　$x^4+2x^3+3x^2+2x-3=0$。

2. 把多项式

$$f(x)=x^4+4x-1$$

分解成两个实二次式之积。

3. 证明：四次方程

$$4x^4+3x^2+1=0$$

没有实根。

§5.6　方程的有理根

前面我们讲过，高于四次的复数域的方程，没有一般的求根公式。但当方程系数都是有理数，同时只要求其有理根时，问题就较为简单了。这类问题是常见的，其解决方法已

比较完善，本节主要讨论这类问题。

下面介绍的方法是牛顿（Newton）注首先应用的，因此也称为牛顿试除法。

首先，有理数域上的方程通过两端同乘系数分母的最小公倍数，就可化为整系数方程。这个方程与原方程同解（同解就是两个方程有共同的解）。

如有方程

$$2x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{15}x-\frac{7}{10}=0,$$

两端同乘3、15和10的最小公倍数30，得

$$60x^3+20x^2+2x-21=0.$$

这个方程与原方程同解，但它是一个整系数方程，因此，问题归为求整系数方程有理根的问题。

若给定整系数方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (1)$$

其中$a_0\neq 0$，需要找出它的有理根所在的范围。

定理1 若既约分数$\frac{p}{q}$为整系数方程（1）的根，则p整除常数项a_n，q整除首项系数a_0。

（注意：$\frac{p}{q}$为既约分数是指p和q互素，p和q可以为负整数）

证明： $\frac{p}{q}$是(1)的根，因而

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0.$$

注 I.Newton（1642—1727），英国著名物理学家、数学家。

等式两端同乘q^n，得

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0, \quad (2)$$

$$a_nq^n=p(-a_0p^{n-1}-a_1p^{n-2}q-\cdots-a_{n-1}q^{n-1}). \quad (3)$$

(3)的右端括号内显然是一个整数，所以a_nq^n是p的整数倍。由于p和q互素（$\frac{p}{q}$为既约分数），故p和q^n也互素，因而p必须整除a_n。定理1的第一部分得证。

另外，由（2）可得

$$a_0p^n=q(-a_1p^{n-1}-\cdots-a_{n-1}pq^{n-1}-a_nq^{n-1}). \quad (4)$$

依据同样的推理，知q整除a_0。

证毕。

定理1说明，方程（1）的有理根只能是满足$p|a_n$和$q|a_0$的既约分数$\frac{p}{q}$。但是，满足这两个条件的既约分数却不一定是（1）的根。如已知方程

$$2x^2+3x+4=0,$$

分数$\frac{1}{2}$显然满足条件$1|4$，$2|2$，但$\frac{1}{2}$不是它的根。

定理1给我们提供了一个求有理根的方法。那就是，只要把首项系数和常数项的所有（正负）因子找出来（它们总是有限多的），用常数项的因子作分子，首项系数的因子作分母，搭配成所有可能的分数，这些分数就包含着原方程的全部有理根。因而只要看看这些分数中哪一个适合方程，哪一个就是方程的根。如果都不适合，就说明该方程没有有理根。

例1 求方程$x^4+\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0$的所有

有理根。

解：方程两端同乘3，得

$$f(x)\equiv 3x^4+5x^3+x^2+5x-2=0。$$

$a_0=3$ 的因子有 ± 1，± 3；

$a_n=-2$ 的因子有 ± 1，± 2。

以a_0的因子为分母，以a_n的因子为分子的所有可能的既约分数有：1，-1，2，-2，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{3}$，共8个数。将它们代入方程左端，或者用综合除法检验（后者较为方便适用）。例如用1，-1，-2检验，得

	3	5	1	5	-2
1		3	8	9	14
	3	8	9	14	12

$f(1)=12\neq 0$；

	3	5	1	5	-2
-1		-3	-2	1	-6
	3	2	-1	6	-8

$f(-1)=-8\neq 0$；

	3	5	1	5	-2
-2		-6	2	-6	2
	3	-1	3	-1	0

即$f(-2)=0$。

现在得到一个根-2，同时还得到用$x+2$除$3x^4+5x^3+x^2+5x-2$的商式$f_1(x)=3x^3-x^2+3x-1$。下面来求方程$3x^3-x^2+3x-1=0$的有理根。

待验有理数只有1，-1，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$。经验算：

$f_1\left(-\frac{1}{3}\right)\neq 0$，$f_1\left(\frac{1}{3}\right)=0$，又因$f(\pm 1)\neq 0$，即知

$f_1(\pm 1)\neq 0$，且

$$f_1(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+3).$$

方程$3x^2+3=0$的根是$\pm i$，无有理根，因而原方程的有理根是-2和$\frac{1}{3}$.

对于首项系数为1的整系数方程，问题更简单，这时首项系数的因子只有±1，因而方程的有理根都是整数.

推论1 首项系数为1的整系数方程的有理根是整数，且是常数项的因子.

例2 求方程

$$x^3+3x^2+27x-31=0$$

的所有有理根.

解： 方程的首项系数为1，因而其有理根都是整数，且是-31的因子，-31的因子只有±1和±31，用综合除法进行检验：

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 27 & -31 \\ 1 & & 1 & 4 & 31 \\ \hline & 1 & 4 & 31 & 0 \end{array}$$

说明1是根，剩下的根都是方程$x^2+4x+31=0$的根.但由于此方程的系数都是正数，所以不可能有正根，即1和31都不是根.还可验证-1和-31也不是根.

所以，原方程的有理根只有1.

注意： 若要求另外两根，可用求根公式解方程$x^2+4x+31=0$，得$x=-2\pm\sqrt{4-31}=-2\pm3\sqrt{3}\,i$.

上述求有理根的方法的缺点是须检验的分数太多. 例如若一个方程的$a_0=12$，$a_n=20$，那末以a_0为分母，以a_n为分

子的不同的既约分数就有40个，须进行许多次综合除法才能决定出全体有理根。若a_0和a_n的因子再多一些，将更加繁琐。所以，必须设法将待验有理数范围再缩小一些。为此，需要分析一下有理根还要适合哪些必要条件？

定理2 若既约分数$\frac{p}{q}$是整系数方程(1)的根，则$(q-p)|f(1)$，$(q+p)|f(-1)$。

证明：若$\frac{p}{q}$是方程$f(x)=0$的根，亦即$f(x)$的根，由因式定理，应有$\left(x-\frac{p}{q}\right)\Big|f(x)$。设

$$f(x)=\left(x-\frac{p}{q}\right)h(x), \tag{5}$$

其中$h(x)$是有理系数多项式。由§4.3定理1，存在整系数多项式$g_1(x)$和$h_1(x)$及非零有理数k_1，k_2，满足

$$f(x)=g_1(x)h_1(x).$$

其中$g_1(x)=k_1\left(x-\frac{p}{q}\right), h_1(x)=k_2h(x)$。

代入(5)知，$k_1k_2=1, k_2=\frac{1}{k_1}$。

$g_1(x)$是整系数多项式，故k_1必为整数，且是q的倍数。设$k_1=kq$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=g_1(x)h_1(x)=kq\left(x-\frac{p}{q}\right)h_1(x)\\&=(qx-p)[kh_1(x)].\end{aligned}$$

令$x=1$，得$f(1)=(q-p)[kh_1(1)]$。由于$kh_1(x)$是整系数多项式，$kh_1(1)$是整数，所以，$(q-p)|f(1)$。令$x=-1$，则得$(q+p)|f(-1)$。

证毕。

定理2有一个重要的特殊情形，即当有整根的情形。设a为整根，则$\frac{a}{1}$是既约分数，由定理2，可得

推论2 若a是整系数多项式$f(x)$的整根，则$(a-1)|f(1)$，$(a+1)|f(-1)$。

到此为止，我们已经介绍了有理数是整系数方程的根的两个必要条件，即定理1和定理2。它们是求整系数方程有理数根的重要依据。

为了求整系数方程(1)的有理根，首先要根据a_0和a_n写出所有可能的有理数$\frac{p}{q}$，然后计算$f(1)$和$f(-1)$。若$f(1)$和$f(-1)$都不是零，说明± 1不是根。对每个待验有理数$\frac{p}{q}$，考查$(q-p)|f(1)$和$(q+p)|f(-1)$是否同时成立。两者只要有一方不成立，就说明$\frac{p}{q}$不是根，便将其“淘汰”掉。最后只剩下少数有理数，再用综合除法一一检验，即可找到全部有理数根。如果$f(1)$或$f(-1)$为零，说明我们正巧找到了有理根1或-1。用$x-1$或$x+1$除$f(x)$，得商$g(x)$，那末，$f(x)$的其余根都是$g(x)$的根。这时再对$g(x)$进行同样的讨论，最后得出方程(1)的所有有理根。

例3 求方程

$$g(x)\equiv x^4-x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0 \qquad (6)$$

的所有有理根。

解：(1) 化为整系数方程。

(6)式两端同乘4，得整系数方程

$$f(x)\equiv 4x^4-4x^3+3x^2+2x+1=0。$$

(2) 写出待检验的有理数。

由于$a_0=4$，$a_n=1$，所以

a_0的因子有± 1，± 2，± 4；a_n的因子有± 1。

因而待验的有理数有6个：± 1，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{4}$。

(3) 计算$f(1)$和$f(-1)$。

$$f(1)=6，f(-1)=10。$$

(4) 检验是否$(q-p)|f(1)$，$(q+p)|f(-1)$。

$\frac{1}{2}$不是根，因$(1+2)\nmid f(-1)$。同理$-\frac{1}{4}$也不是根。但$-\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$适合$(-1+2)|f(-1)$，$(-1-2)|f(1)$，$(1+4)|f(-1)$，$(1-4)|f(1)$。

(5) 用综合除法最后确定有理根。

$-\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$还不一定是根，用综合除法可知：$f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\neq 0$，$f(\frac{1}{4})=\frac{105}{64}\neq 0$。

总之，原方程无有理根。

例4 求方程

$$f(x)\equiv 2x^5+7x^4+3x^3-11x^2-16x-12=0$$

的所有有理根。

解：$a_0=2$，$a_n=-12$。

a_0的因子有± 1，± 2；

a_n的因子有± 1，± 2，± 3，± 4，± 6，± 12。待验有理数有16个：

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

$f(1)=-27$，$f(-1)=-5$。

$2=\frac{2}{1}$不是根，因$(2+1)\nmid f(-1)$；

$-2=\frac{-2}{1}$满足$(-2+1)|f(-1)$，$(-2-1)|f(1)$。但还不能肯定-2是根，用综合除法检验：

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 7 & 3 & -11 & -16 & -12 \\ -2 & & -4 & -6 & 6 & 10 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & -3 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$f(-2)=0$，所以-2是根。同时由除式可知，$f(x)$用$x+2$除的商式是$h(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x-6$，它的根都是$f(x)$的根。下面只须求方程

$$h(x)\equiv 2x^4+3x^3-3x^2-5x-6=0$$

的有理根。

待验的有理数有± 1，± 2，± 3，± 6，$\pm\frac{1}{2}$和$\pm\frac{3}{2}$。

$h(1)=-9$，$h(-1)=-5$。

因2不是$g(x)$的根，所以也不是$h(x)$的根，不必检验2。不难发现-2仍然适合

$(-2+1)|h(-1)$，$(-2-1)|h(1)$。

用综合除法求$h(-2)$：

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 3 & -3 & -5 & -6 \\ -2 & & -4 & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

说明$h(-2)=0$，-2是$h(x)$的根，因而是$f(x)$的重根。$h(x)$除以$x+2$的商（即$f(x)$除$(x+2)^2$的商）为$k(x)=2x^3-x^2-x-3$。这时，待验的有理数是±1，±3，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{3}{2}$。

$k(1)=-3$，$k(-1)=-5$。

经检验，只有$\frac{3}{2}$适合 $(3+2)\,|k(-1)$，$(3-2)|\,k(1)$。

而$k\left(\frac{3}{2}\right)=0$，且$k(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x+2)$。

原方程是一个五次方程，已经知道它的三个有理根：-2，-2，$\frac{3}{2}$，另外两个根是方程

$$2x^2+2x+2=0$$

的根。易见$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$是虚根。

因此，原方程的有理根为-2，-2，$\frac{3}{2}$。

例5 设p为素数，求证$\sqrt[n]{p}$ $(n>1)$ 是一个无理数$(n>1)$。这里开方指算术根。

分析：只须证明方程$x^n-p=0$无有理根。

证明：由于$x^n-p=0$是首项系数是1的整系数方程，故其有理根都是整数，且是p的因子。但p是素数，因子只有±1和$\pm p$，这四个数显然都不是方程$x^n-p=0$的根，因而$x^n-p=0$无有理根。但实数$\sqrt[n]{p}$是它的根，故$\sqrt[n]{p}$不是有理数，只能是无理数。

例6 设$f(x)=0$是整系数方程。若$f(0)$和$f(1)$都是奇数，则方程无整根。

分析：若α是方程的整数根，则α不外偶奇两种，由本节定理，皆可推出矛盾。

证明：设α是$f(x)$的整根。

若α是偶数，由定理1，α应是奇数$f(0)=a_n$的因子。这当然不可能，因为奇数无偶因子；

若α是奇数，则$\alpha-1$是偶数。由推论2，$\alpha-1$是$f(1)$的因子，$f(1)$是奇数，同样也出现矛盾。

所以，方程$f(x)=0$无整根。

例7 证明多项式x^3-3x+1是有理数域上的不可约多项式。

证明：若x^3-3x+1是有理数域上的可约多项式，必有有理根，设为α。由推论1，α是整数，且为常数项1的因子，因而α只能是±1。但易见±1都不是它的根，故在有理数域上多项式x^3-3x+1不可约。

注意：用有无有理根来判定多项式在有理数域上是否可约，仅限于二次和三次多项式，高于三次的多项式，就算没有有理根也可以是有理数域上可约多项式。如$f(x)=(x^2+1)(x^2-2)$没有有理根，但可约。

习　题　5.6

1. 求下列方程的所有有理根：

(1) $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$；

(2) $x^4-x^3-x-1=0$；

(3) $5x^4+10x^3-20x^2-40x=0$；

(4) $x^5-6x^4+12x^3-8x^2=0$；

(5) $x^5-4x^3+2x^2+3x-2=0$；

(6) $(x^2+x)^2+4x^2+4x-12=0$；

(7) $4x^4-11x^2+9x-2=0$；

(8) $6x^4-11x^3-x^2-4=0$；

(9) $x^6-3x^5-40x^4+x^3-3x^2-40x=0$。

2. 先求下列方程的有理根，后解方程：

(1) $4x^3-7x^2-x+3=0$；

(2) $2x^4-5x^3+3x^2+4x-6=0$。

3. k取何值时方程

$$x^3+kx^2+3x+2=0$$

有有理根？

4. 设有整系数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

若a_0，a_1，…，a_{n-1}有公因子d，但$d\nmid a_n$，求证此方程没有整根。

5. 设有整系数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

又设p为素数，且整除a_1，a_2，…a_n，证明$f(x)$的整数根（如果存在）必为p的倍数。

6. 利用上题的结果，求下列方程的所有有理根：

（1） $x^4+2x^3-6x^2-38x+68=0$；

（2） $x^5+7x^3-14x+7=0$。

本 章 提 要

1. 代数基本定理及其推论：复数域上n次方程（$n\geqslant1$）有且仅有n个复根.

2. 复数域上只有一次多项式是不可约多项式.

3. 实数域上的不可约多项式只有一次多项式和满足$b^2-4ac<0$的二次三项式ax^2+bx+c.

4. 方程的根与系数的关系：

设方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$的复根为$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$（$a_0\neq0$），则有

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_1}{a_0},$$

………

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i+\cdots+\alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+2}\cdots\alpha_n=(-1)^i\frac{a_i}{a_0},$$

………

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

5. 方程的变换：

（1） 根反号变换——从首项起，隔项变号；

（2） 根乘数k变换——首项不变，第二项乘k，第三项乘k^2，…；

（3） 根平移c变换——按$x-c$的方幂展开，以y代$x-c$；

(4) 根倒数变换——系数次序全部颠倒.

6.三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$的卡当解法:

(1) 化为缺二次项的方程$y^3+py+q=0$;

(2) 求z_1，利用$z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$;

(3) 求α_i，利用$\alpha=\sqrt[3]{z_1}$;

(4) 求β_i,利用$\beta_i=\frac{-p}{3\alpha_i}$，$i=1,2,3$;

(5) 求y_i，利用$y_i=\alpha_i+\beta_i$,$i=1,2,3$;

(6) 求x_i，利用$x_i=y_i-\frac{a}{3}$,$i=1,2,3$.

*7.实三次方程$x^3+px+q=0$的讨论（$q\neq0$）:

(1) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$，有一个实根和一对共轭虚根;

(2) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$，有一个单实根及一个二重实根;

(3) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$，有三个不同的实根.

8.四次方程$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$的费拉里解法:

(1) 由系数确定予解方程;

(2) 求出予解方程的一个根t_0;

(3) 求出$\sqrt{t^2-d}$的一个方根，设为g;

(4) 算出$h=\frac{at_0-c}{2g}$;

(5) 解两个二次方程:

$$x^2+(\frac{a}{2}+h)x+(t_0+q)=0,$$

$$x^2+(\frac{a}{2}-h)x+(t_0-q)=0$$

9.有理数域上方程的有理根求法:

（1） 化为整数系方程；

（2） 由首项和常数项，写出全部待验有理数$\frac{p}{q}$.其中p整除常数项，q整除首项，p与q互素；

（3） 计算$f(1)$和$f(-1)$；

（4） 利用有理根的必要条件：$(q-p)|f(1)$和$(q+p)|f(-1)$，淘汰掉不能同时满足这两个条件的待验有理数$\frac{p}{q}$.

（5） 对剩下的待验有理数，用综合除法逐一验证.

复 习 题 五

1.证明等式：

（1） $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$$=x(x+5)\left(x+\frac{5+\sqrt{15}i}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{15}i}{2}\right);$$

（2） $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$$=(x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6});$$

（3） $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$

$$=(x-1)(x+2)(x+3)(2x-1).$$

2.k为何值时方程

$$x^3+8x^2+kx+6=0$$

有整数根？

3.试求方程

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

两个根之和为零的条件.

4.已知方程$3x^5+2x+1=0$，求作方程，使其根为已知方程根的负倒数.

5.试作根为方程

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

的根的倒数减i的方程.

3.已知$1-i$和i都是方程$f(x)=0$的根，试问:

(1) 若要求$f(x)$是次数最低的复系数多项式，则$f(x)$是什么?

(2) 若要求$f(x)$是次数最低的实系数多项式，则$f(x)$是什么?

7.证明方程

$$36x^3-12x^2-5x+1=0$$

的一个根是另两个根之和.并求解此方程.

8.方程

$$x^3-6x^2+ax-6=0$$

有一个根是3，求解此方程.

9.设α和β（$\alpha\neq\beta$）是方程

$$x^3+px+q=0$$

的根，且满足$\alpha\beta+\alpha+\beta=0$，求证:

$$(p-q)^2+q=0.$$

并求方程的第三个根.

10.设x_1，x_2，x_3是方程

$$x^3+2x-1=0$$

的根，试写出以x_1x_2，x_3x_1，x_2x_3为根的方程.

11.证明：方程

$$x^2+px+q=0$$

没有有理根.（其中p和q为奇数）

12.试求以下方程的所有有理根:

(1) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$;

(2) $2x^5+7x^4+3x^3-11x^2-16x-12=0$;

(3) $3x^6-5x^4-10x^3-8x^2+x-2=0$;

(4) $2x^8-x^7+8x^4+x^2-5=0$;

(5) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$;

(6) $x^4+6x^3+6x^2-8=0$;

(7) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$.

13.解方程（先求有理根）：

(1) $x^3+15x+124=0$;

(2) $2x^5-9x^4+9x^3+6x^2-11x+3=0$;

(3) $x^3+3x^2-3x-14=0$;

(4) $x^4+2x^3+2x^2+10x+25=0$;

(5) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$.

14.已知方程

$$x^4+4x^3+2x^2-4x+1=0$$

有两对相等的根，求解此方程．

15.已知方程

$$x^3-4x^2+x+a=0$$

有一个根为-1，试解此方程．

16.用§5.6的知识证明$\sqrt[m]{p_1p_2\cdots p_r}$是一个无理数．(这里$p_1, p_2$，…，$p_r$是互不相同的素数，$m>1$)

17.设有整系数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

若a_n与$f(-1)$都为奇数，求证该方程无有理根．

第六章　实系数方程

在这一章，我们研究实系数方程，目的是寻求实系数方程实根的近似计算方法，因而要首先讨论实根的界以及确定实根个数的方法。

§6.1　实根的界

一、什么是实根的界？

上章讲过，高于四次的方程没有一般的求根公式，但在实际工作中却经常遇到次数很高的方程，它们往往是实系数的，而且只需要求实根。

对于这类问题，我们不再追求解的一般表达式，而向另一方向努力，即试图找出根的近似值(称为根的近似计算)。从实用的观点来看，若对任一高次方程都能求得根的任意精确度的近似值，那实际上就解决了方程的求根问题。退一步讲，就算给出了解的精确表达式（象三、四次方程那样），实际上计算出来的，也往往是近似数。比方若 $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 是一个根的表达式，但要把 x 用小数写出来，还是一个近似数。因此，有时人们宁肯用近似计算的方法而不用求根公式。

为了解决实系数方程实根近似计算的问题，必须首先掌握如何确定方程实根的范围，即确定实根界的方法。

设有实系数n次方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n = 0. \qquad (1)$$

定义1 若N为正实数，方程(1)的所有正实根都小于N，则称N为方程(1)的正根上界。

同法可定义正根下界，负根上界和下界。

显然，正根上界不是唯一的。因为若N是正根上界，那末任意$\geqslant N$的实数，显然也是正根上界。对于正根上界，当然越小越有价值。

二、正根上界的求法

先来解决如何求方程正根上界的问题。

引理1 设实系数多项式$f(x)$形如(1)。假定A是$|a_1|$，$|a_2|$，…，$|a_n|$中的最大数，则当$|x|\geqslant 1+\frac{A}{|a_0|}$时，

$$|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|. \qquad (2)$$

证明：因为$f(x)$是n次多项式，首项系数$a_0\neq 0$。取$N=1+\frac{A}{|a_0|}$。当$A=0$时，必有$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，引理显然成立。当$A>0$时，$N>1$，于是当$|x|\geqslant N$时，$|x|>1$，且

$$|a_0|(|x|-1)\geqslant A.$$

而
$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|$$
$$\leqslant|a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}+\cdots+|a_n|$$
$$\leqslant A(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\cdots+1)=A\frac{|x|^n-1}{|x|-1}$$

$$<A\frac{|x|^n}{|x|-1}\leqslant\frac{|a_0|(|x|-1)|x|^n}{|x|-1}=|a_0x^n|.$$

定理1 沿用引理1的条件和符号，则N是方程正根的上界。

分析：要证N是正根的上界，只须证明当$x\geqslant N$时，$f(x)\neq 0$，或$|f(x)|>0$。

证明：当$x\geqslant N=1+\frac{A}{|a_0|}$时，由引理1，

$$|f(x)|=|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|$$
$$\geqslant|a_0x^n|-|a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|>0.$$

因而N是$f(x)$的正根上界。

例1 求方程$f(x)=2x^5+100x^2-5x-40=0$的正根上界。

解：$a_0=2$，$A=100$，所以$N=1+\frac{100}{2}=51$。

上面讲的根界判别方法，给出的根界一般过大，下面再给出一个另外的判别定理。

定理2(马克劳林[注]方法) 设方程(1)首项系数$a_0>0$，而a_1，…，$a_{k-1}\geqslant 0$，但$a_k<0$（即a_k是第一个负系数）。用B代表负系数中绝对值最大的数，则$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$是正实根的上界。

分析：只须证明当$x\geqslant 1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$时，$f(x)\neq 0$。

证明：当$x\geqslant 1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$（因而$x>1$）时，

注 *C.Maclaurin*（1698—1746）．英国数学家

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \\
&\geqslant a_0x^n + a_kx^{n-k} + \cdots + a_n \\
&\geqslant a_0x^n - Bx^{n-k} - \cdots - B \\
&= a_0x^n - B(x^{n-k} + \cdots + 1) \\
&= a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1} > a_0x^n - \frac{Bx^{n-k+1}}{x-1} \\
&= x^{n-k+1}\left(a_0x^{k-1} - \frac{B}{x-1}\right) \\
&= \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1) - B\right] \\
&> \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0(x-1)^k - B\right] \geqslant 0 .
\end{aligned}
$$

即　$f(x) > 0$。因而 $1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$ 是正根的一个上界。

注意：若 $f(x)$ 没有负系数，显然没有正根，这时任何正实数都是其正根上界。

例 2　用定理 2 求例 1 的正根上界。

解：$k=4$，$B=40$，$1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}} = 1+\sqrt[4]{\dfrac{40}{2}} \approx 3.2$。

注意：例 1 和例 2 是同一个问题，但使用的方法不同，结果差别很大，一般说来第二个方法较好。

三、其他三个界怎么求？

现在知道了求正根上界的方法，但实际问题常常还需要

求正根的下界、负根的上界和下界。就是找出两对实数：L，N和R，M，使方程正根在区间（L，N）内，负根在区间（M，R）内。实根其它三个界的求法，完全可以归结为求正实根上界的问题。为了说明这个道理，对方程(1)进行变换（见§5.3）：

1.对(1)进行根反号变换，设变换后的方程为

$$g_1(x)=0. \qquad (3)$$

$g_1(x)$是$f(x)$从首项开始隔项变号得到的。

2.对(1)进行根倒数变换，设变换后的方程为

$$g_2(x)=0. \qquad (4)$$

$g_2(x)$是$f(x)$的系数前后颠倒顺序得到的。

3.对(1)进行根反号变换，再进行根倒数变换，设变换后的方程为

$$g_3(x)=0. \qquad (5)$$

$g_3(x)$是$f(x)$隔项变号，再使系数前后颠倒顺序得到的。

定理3　若方程(3)的正根上界为N_1，则$-N_1$是方程(1)负根的下界；若方程(4)正根的上界为N_2，则$\frac{1}{N_2}$是方程(1)正根的下界；若方程(5)正根上界为N_3，则$-\frac{1}{N_3}$为方程(1)的负根上界。

证明：设α为方程(1)的任一正根，β为方程(1)的任一负根。

方程(3)是方程(1)经根反号变换得到的，所以$-\beta$(>0)是方程(3)的正根。N_1是(3)的正根上界，故有

$-\beta < N_1$，或$\beta > -N_1$，即$-N_1$是方程(1)负根的下界；

方程(4)是方程(1)经根倒数变换得到的，所以$\frac{1}{\alpha}$是方程(4)的根，且是正根。N_2是(4)的正根上界，故有$\frac{1}{\alpha} < N_2$，或$\alpha > \frac{1}{N_2}$，即$\frac{1}{N_2}$是方程(1)的正根下界；

方程(5)是方程(1)经根反号变换和根倒数变换得到的，所以$-\frac{1}{\beta}$是方程(5)的根，且是正根。N_3是(5)的正根上界；故$-\frac{1}{\beta} < N_3$，或$\beta < -\frac{1}{N_3}$，$-\frac{1}{N_3}$是方程(1)负根的上界。

证毕。

例3 求方程

$$x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 7x - 3 = 0$$

正根的上界、下界及负根的上界、下界。

解：(1) 求正根上界：

$a_0 = 1$，$B = 8$，$k = 2$。由定理2，其正根上界$N = 1 + \sqrt{8} < 4$，取4为正根上界。

(2) 求正根下界：

对原方程进行根倒数变换，得到方程

$$-3x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0,$$

或
$$3x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

其正根上界为$N_2 = 1 + \frac{7}{3} < 4$。($a_0 = 3$，$k = 1$，$B$

$=7$）故原方程正根下界为$\frac{1}{4}$。

（3） 求负根下界：

对原方程进行根反号变换，得到方程

$$x^5-2x^4-2x^3+8x^2+7x+3=0.$$

其正根上界为 $N_3=1+\frac{2}{1}=3$。（$a_0=1$，$k=1$，$B=2$）故原方程负根下界为$-N_3=-3$。

（4） 求负根上界：

对原方程进行根反号及根倒数变换，得到方程

$$3x^5+7x^4+8x^3-2x^2-2x+1=0.$$

其正根上界为$N_3=1+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}<2$。（$a_0=3$，$k=3$，$B=2$）取2为其正根上界，故原方程负根上界为$-\frac{1}{2}$。

总之，原方程实根在区间（-3，$-\frac{1}{2}$）与（$\frac{1}{4}$，4）内。

注意：定理2给出的求正根上界的方法，得出的上界总是大于1的正实数（$N=1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}>1$）。所以用定理3的方法得来的$N_2$，也是大于1的数，因而，求出的正实根的下界，总是一个小于1的正数。可见，只有当正根接近于零的时候，这种方法求出的正根下界才有较大的意义。在一般情况下，可以不去求正根的下界与负根的上界。重要的是正根的上界和负根的下界，也就是整个实根的上、下界.

习 题 6.1

1. 求下列方程正根的上、下界及负根的上、下界：

（1） $x^4+4x^3-8x^2-10x^2-10x+14=0$；

（2） $x^5-7x^3-4x+3=0$；

（3） $x^3-2x+1=0$；

（4） $x^3-3x^2-5x+2=0$。

2. 若$f(x)$按$x-c$方幂的展开式（见§2.6）为：$f(x)=b_0(x-c)^n+b_1(x-c)^{n-1}+\cdots+b_n$，其中$c$为实数，$b_0$，$b_1$，…，$b_n$为正实数，则$c$为多项式$f(x)$实根的上界。试证明之。

§6.2 斯图姆定理

对于实根的近似计算问题，还不能马上着手讨论，因为准备工作没有做完。上节我们学过如何求实根的界，这样只能大体上知道实根的总的范围。但是，对于任意给定的区间（a，b），在其中有没有根？有多少根？如何将各个实根隔离开来？无疑都是十分重要的。现在就来讨论它们，所用的方法是法国数学家斯图姆（*Sturm*）提出的，因此这个方法也叫斯图姆方法。

斯图姆方法所直接解决的问题是：对于任意给定的区间（a，b），实系数多项式$f(x)$（或方程$f(x)=0$）有多少个实根？

以后，我们总假定实系数多项式$f(x)$没有重根。因若不然，用（$f(x)$，$f'(x)$）除$f(x)$所得的商式便无重

根，且与$f(x)$有相同的根（见§4.3）。这样，可用上述商式代替$f(x)$来进行讨论。

由$f(x)$开始，作一系列多项式：

令$f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)$（$f(x)$的导数），然后用$f_1(x)$除$f_0(x)$，得余式$r(x)$，$r(x)$乘-1后取作$f_2(x)$，再以$f_2(x)$除$f_1(x)$，把所得的余式乘-1，记为$f_3(x)$。如此继续下去，每个$f_{i+1}(x)$比$f_i(x)$至少降低一次，最后必得$f_s(x)$，它整除$f_{s-1}(x)$。

上述过程类似于辗转相除法，只是这里对每次的余式都须反号，然后再进行下一步的带余除法。对于以求最大公因式为目的辗转相除法来说，不仅允许反号（即乘-1），而且还可以乘任意不等于零的数。所以按上述方法求出的$f_s(x)$，是$f(x)$和$f'(x)$的最大公因式。

f_0，f_1，f_2，…，f_{s-1}，f_s的关系式如下：

$$f_0(x)=f_1(x)q_1(x)-f_2(x),$$
$$f_1(x)=f_2(x)q_2(x)-f_3(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_{k-1}(x)=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_{s-2}(x)=f_{s-1}(x)q_{s-1}(x)-f_s(x),$$
$$f_{s-1}(x)=q_s(x)f_s(x).$$

定义1 上述多项式组

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_s(x) \qquad (1)$$

称为$f(x)$的斯图姆组。

例1 求$f(x)=x^4-6x^2-4x+2$的斯图姆组。

解：$f'(x)=4x^3-12x-4$，取$f_1(x)=x^3-3x-1$。

（因为我们下面只注意函数值符号，所以允许用一个正的常数乘余式、除式或被除式，但不允许用负数来乘）

用$f_1(x)$除$f(x)=f_0(x)$得余式$-3x^2-3x+2$，再用$f_2(x)=3x^2+3x-2$除$f_1(x)$得余式$-4x-5$，令$f_3(x)=4x+5$，$f_3(x)$除$f_2(x)$得余式-1，所以$f_4(x)=1$。因而$f(x)$的斯图姆组是

$$f_0(x)=x^4-6x^2-4x+2,$$
$$f_1(x)=x^3-3x-1,$$
$$f_2(x)=3x^2+3x-2,$$
$$f_3(x)=4x+5,$$
$$f_4(x)=1.$$

下面我们介绍斯图姆组的一些性质。

性质 1　$f_s(x)$是一个零次多项式（即非零常数），因而无根。

证明：由前面所说，$f_s(x)=(f(x),\ f'(x))$。因为假定$f(x)$无重根，所以$f(x)$和$f'(x)$互素，$f(x)$和$f'(x)$的最大公因式只能是非零常数，因此$f_s(x)$是零次多项式。

性质 2　斯图姆组（1）中任意相邻的多项式没有公根。

证明：用反证法。设$f_k(x)$和$f_{k+1}(x)$（$0\leqslant k\leqslant s-1$）有公根$\alpha$。由因式定理，$f_k(x)$和$f_{k+1}(x)$都能被$x-\alpha$整除，于是由等式

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x)$$

知，$f_{k-1}(x)$也应被$x-\alpha$整除，所以α是$f_{k-1}(x)$的根。同样可证α也是$f_{k-2}(x)$，$f_{k-3}(x)$，…，$f_2(x)$，$f_1(x)$，$f_0(x)$的根，即α为$f(x)$和$f'(x)$的公根。于是推得$f(x)$和$f'(x)$不互素，与$f(x)$没有重根的假定矛盾。

性质 3 若实数 α 是斯图姆组(1)的某个中间多项式 $f_k(x)$（它不是 $f_0(x)$ 和 $f_s(x)$，$1 \leqslant k \leqslant s-1$）的根，那末 $f_{k-1}(\alpha)$ 和 $f_{k+1}(\alpha)$ 符号相反。

证明： 由于 α 是 $f_k(x)$ 的根，故 $f_k(\alpha)=0$。在等式

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x)$$

中，以 $x=\alpha$ 代入后，得

$$f_{k-1}(\alpha)=-f_{k+1}(\alpha)。$$

由性质 2，α 不是 $f_{k-1}(x)$ 和 $f_{k+1}(x)$ 的根，故上式不等于零，$f_{k-1}(\alpha)$ 和 $f_{k+1}(\alpha)$ 符号相反。

性质 4 若 α 是 $f(x)$ 的实根，则当 x 从小于 α 经 α 增大时，乘积 $f_0(x)f_1(x)(=f(x)f'(x))$ 的值由负变正。

注意： 这里用到实函数的分析性质。多项式可以看作连续可微的实函数。一个可微函数的导数若在某一点为正，则该函数本身在这一点附近是一个增函数；若导数在某一点为负，则这函数本身在该点附近是减函数。没有学过数学分析的读者，可以这样理解：函数在某点的导数，代表函数图象在这点切线的斜率，从图象上容易看清以上特性。

证明： α 是 $f(x)$ 的根。根据性质 2，α 不是 $f'(x)$ 的根，$f'(\alpha)\neq 0$。若 $f'(\alpha)>0$，则在 α 附近，$f(x)$ 是增函数。当 x 由小于 α 变到大于 α 的时候，$f(x)$ 由小于 $f(\alpha)$ 变到大于 $f(\alpha)$，即由小于零变到大于零。因而乘积 $f(x)f'(x)$ 由负变正；若 $f'(\alpha)<0$，则在 α 附近 $f(x)$ 是减函数，当 x 由小于 α 变到大于 α 的时候，$f(x)$ 由大于 $f(\alpha)$ 变为小于 $f(\alpha)$，即由大于零变到小于零，因而乘积 $f(x)f'(x)$ 也由负变正。

定义 2 对于有限个实数组成的序列组

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n, \qquad (2)$$

若在其中有两个相邻的实数符号相反，则称(2)中出现了一个变号。组(2)变号的总数，称为(2)的变号数。

如：2，1，-1，-2，1，3，-5中，(1，-1)，(-2，1)，(3，-5)之间都有变号，故它的变号数是3。

若一个实数序列中含有零，则这个组的变号数，与把所有零都去掉后的实数组变号数相同。就是说，零不影响变号数。如

$$1,\ -3,\ 0,\ 0,\ 1,\ -2,\ 0,\ 1$$

与

$$1,\ -3,\ 1,\ -2,\ 1$$

的变号数相同，都是4。

定义3 多项式$f(x)$的斯图姆组(1)中的全体多项式在$x=c$点的函数值组成的实数组

$$f_0(c),\ f_1(c),\ \cdots,\ f_s(c) \tag{3}$$

的变号数，叫做$f(x)$在c点的变号数，记为$\vee(c)$。对于x的任意实数值，实数组$f_0(x),\cdots,f_s(x)$的变号数，记为$\vee(x)$，因而$\vee(x)$可以看作x的整值函数。

下面的定理是本节的主要内容。它把实多项式（或方程）实根个数的问题，归为多项式斯图姆组变号数的问题。

定理1（斯图姆定理） 设实系数多项式$f(x)$（或说实系数方程$f(x)=0$）没有重根，并且实数a和b（$a<b$）都不是它的根，则$f(x)$在区间$(a,\ b)$内实根的个数，等于$f(x)$的斯图姆组在$x=a$与$x=b$时变号数的差$\vee(a)-\vee(b)$。

分析：我们来研究动点x从a逐渐向b增大的过程中$\vee(x)$的变化。

把区间$(a,\ b)$内的点分成三类：

第一类点——不是斯图姆组$f_0(x)$，$f_1(x)$，…，$f_s(x)$中任何多项式的根，这是大多数的点。

第二类点——是中间多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_{s-1}(x)$中某个多项式的根，但不是$f_0(x)=f(x)$的根。

第三类点——是$f_0(x)(=f(x))$的根。

我们证明当x经过第一、二类点时，$\vee(x)$不变，只有经过一个第三类点时，$\vee(x)$才会减掉1。这样，只要看从a到b时$\vee(x)$总共减少了多少，就知道a与b之间$f(x)$有多少个实根了。

证明：设α是(a, b)内任一点。分三种情况考虑：

首先，当α不是$f(x)$的斯图姆组中任何多项式的根时，由于$f_0(x)$，$f_1(x)$，…，$f_s(x)$都是连续函数，所以距a足够近的x的函数值$f_k(x)$与$f_k(a)$同号$(k=0, 1, \cdots, s)$（精确地说，应是：存在$\varepsilon>0$，使当$x\in[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$时，所有$f_k(x)$与$f_k(\alpha)$同号）。故变号数$\vee(x)$在$\alpha$附近（即当$x\in[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$）保持不变。

当α是某中间多项式$f_k(x)$的根（其中$1\leqslant k\leqslant s-1$）时，由性质2，$\alpha$不是$f_{k-1}(x)$和$f_{k+1}(x)$的根．由性质3，$f_{k-1}(a)$和$f_{k+1}(\alpha)$符号相反。$f_{k-1}(x)$和$f_{k+1}(x)$是连续函数，故存在小区间$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$($\varepsilon>0$)，当$x$在其中时，$f_{k-1}(x)$与$f_{k-1}(a)$同号，$f_{k+1}(x)$与$f_{k+1}(a)$同号（这是连续函数的保号性）。因而在$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$上，$f_{k-1}(x)$与$f_{k+1}(x)$符号相反。那末，不管$f_k(x)$是正是负或是零，$f_{k-1}(x)$，$f_k(x)$，$f_{k+1}(x)$三个数的变号数总是1（因为三个数组成的数组，如果两端符号相反，那就不论中间的数是什么，它的变号数都是1）。因而当动点x从$\alpha-\varepsilon$经α增加到$\alpha+\varepsilon$

时，$f_k(x)$本身的符号虽然改变，但$f_{k-1}(x)$，$f_k(x)$，$f_{k+1}(x)$的变号数不变。若α碰巧又是其它一个中间多项式的根，根据刚才证明的思路，同样可知$\vee(x)$也不变。

当α是$f_0(x)$（即$f(x)$）的根时，若x经α从小变大，由性质4，乘积$f_0(x)f_1(x)$由负变正，即$f_0(x)$，$f_1(x)$由异号变为同号，因此，数$f_0(x)$，$f_1(x)$组成的数组变号数由1变为0。$f(x)$没有重根，所以α不是$f_1(x)$（$=f'(x)$）的根。由上面已证的两种情况可知，不论α是不是某个$f_k(x)(2\leqslant k\leqslant s-1)$的根，$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的变号数经α时不变。因此，$f_0(x)$，$f_1(x)$，…，$f_s(x)$的变号数$\vee(x)$经α时正好减1。

(a, b)内的每个点必属而且仅属以上三种情况之一。这就说明，在x由a变到b的过程中，当而且仅当经过$f(x)$的一个实根时，$\vee(x)$减少1。因而$\vee(a)-\vee(b)$等于$f(x)$在a与b之间实根的个数。

证毕。

习 题 6.2

1．试求以下多项式的斯图姆组：

(1) $x^3-10x+2$；

(2) $x^3-x^2-10x+1$；

(3) $x^4-3x^3-2x^2+7x+3$；

(4) $x^4+x^3-x^2-2x+4$。

2．试求以下数列的变号数：

(1) 0，1，2，−1，3，−2，0，0，1，−1；

(2) 1，−1，0，−1，1，0，1，1，−1，−1，1；

(3) -1, 1, 0, -1, -1, 1, 1, 0, 0;

(4) 12, 7, -8, 10, 2, -1, 0, 1, -4.

§6.3 斯图姆定理的应用

斯图姆定理主要用来：

1.判断实多项式（或实系数方程，下同）有没有实根，有多少实根；

2.判断实多项式在已知区间（a, b）内有没有实根，有多少实根；

3.若多项式不止一个实根，找出适当的分隔点，使各个根分居于不同的区间内，这一工作称为根的隔离。

怎样解决这三个问题呢？

首先，我们说明前两个问题可以归为一个问题。

设实多项式 $f(x)$ 正根上界为 N，负根下界为 M，那末 $f(x)$在区间（M, N）内实根的个数，就是 $f(x)$实根的总个数。如果所说的实根个数为零，那就说明$f(x)$没有实根。因而，上面的第一个问题不过是第二个问题的特例。

如果只是为了求实根的总个数，也可以不必求根的界，直接取$-\infty$和$+\infty$为实根的下界和上界，会更简单些。这里$+\infty$理解为充分大的正数，$-\infty$理解为绝对值充分大的负数。我们先来证明，$f(\pm\infty)$的符号与$f(x)$的首项当$x=\pm\infty$时的符号相同。

引理 1　设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$$

是一个实系数多项式，则当x绝对值充分大时，$f(x)$与a_0x^n同

号。

证明：由§6.1引理1，当$|x|\geqslant N=1+\dfrac{A}{|a_0|}$时，

$$|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|.$$

若这时$a_0x^n>0$，则$a_nx^n=|a_0x^n|$，

$$\begin{aligned}f(x)&=|a_0x^n|+(a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\\&\geqslant|a_0x^n|-|a_1x^{n-1}+\cdots+a_n|>0;\end{aligned}$$

若这时$a_0x^n<0$，则$a_0x^n=-|a_nx^n|$，

$$\begin{aligned}f(x)&=-|a_0x^n|+(a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\\&\leqslant-|a_0x^n|+|a_1x^{n-1}+\cdots+a_n|<0.\end{aligned}$$

总之，当x充分大时，$f(x)$和a_0x^n同号。

证毕。

例如多项式x^3-2x+1在$x=+\infty$时与x^3同号，都为正；在$x=-\infty$时与x^3同号，都为负。再如多项式$-x^4+12x-7$在$x=+\infty$时与$-x^4$同号，都为负；当$x=-\infty$时与$-x^4$同号，都为负。

为了解决本节开始时提出的第一个问题，即求$f(x)$实根的个数，可先列出$f(x)$的斯图姆组，然后，求出斯图姆组在$-\infty$和$+\infty$的变号数$\vee(-\infty)$和$\vee(\infty)$，$f(x)$的实根总个数就是$\vee(-\infty)-\vee(\infty)$。

例1 求方程$f(x)\equiv x^4-3x^3-x^2+8x-4=0$的实根总数与在（$-1$，1）内实根的个数。

注意：应用斯图姆定理有一个前提，即$f(x)$无重根。为了判别$f(x)$有没有重根，需要求$f(x)$和$f'(x)$的最大公因式。这样势必增加问题的复杂性，我们可以省去这一步。求出$f(x)$的斯图姆组后，若发现$f_s(x)$是零次多项式，就说明

$f(x)$无重根；否则，$f(x)$有重根。这时再用$f_1(x)$除$f(x)$，得商$\bar{f}(x)$（$\bar{f}(x)$和$f(x)$有相同的根）。然后，另行求出$\bar{f}(x)$的斯图姆组。

对于这种情况，还有另外的方法。

此外，在求斯图姆组的过程中，为避免分数，简化运算，做除法时，允许用正数乘被除式、除式或余式。

解：（1）求出$f(x)$的斯图姆组。

$f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)=4x^3-9x^2-2x+8$。

$f_2(x)=7x^2-18x+8$，$f_3(x)=x-2$，而$f_3(x)$整除$f_2(x)$，说明$f(x)$有重根（$x=2$）。现在我们用$x-2$来除$f(x)$，得商$\bar{f}_0(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}=x^3-x^2-3x+2$，$\bar{f}_1(x)=\bar{f}'(x)=3x^2-2x-3$。继续求出$\bar{f}_0(x)$的全部斯图姆组：$\bar{f}_2(x)=4x-3$，$\bar{f}_3(x)=1$。

（2）求$V(x)$在各点的值：

x	$\bar{f}_0(x)$	$\bar{f}_1(x)$	$\bar{f}_2(x)$	$\bar{f}_3(x)$	$V(x)$
$-\infty$	−	+	−	+	3
-1	+	+	−	+	2
1	−	−	+	+	1
$+\infty$	+	+	+	+	0

说明$\bar{f}_0(x)$有$V(-\infty)-V(+\infty)=3-0=3$个实根，$\bar{f}_0(x)$在$(-1,1)$内有$V(-1)-V(1)=2-1=1$个实根。

$f(x)$和$\bar{f}_0(x)$有共同的根，但$f(x)$有重根，$\bar{f}_0(x)$没有重根。

例 2 试求方程$x^3-x^2-10x+1=0$的实根总个数，及从-3开始到4为止各个整数之间根的个数。

解：（1） 求出斯图姆组。

$f_0(x)=x^3-x^2-10x+1$，$f_1(x)=3x^2-2x-10$，

$f_2(x)=62x+1$，$f_3(x)=1$。

（2） 求$\vee(x)$在各点的值。

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$\vee(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-2	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$+$	$+$	2
1	$-$	$-$	$+$	$+$	1
2	$-$	$-$	$+$	$+$	1
3	$-$	$+$	$+$	$+$	1
4	$+$	$+$	$+$	$+$	0
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

$$\vee(-\infty)-\vee(\infty)=3-0=3.$$

故方程共有3个实根。又由于

$$\vee(-3)-\vee(-2)=3-2=1,$$

$$\vee(0)-\vee(1)=2-1=1,$$

$$V(3)-V(4)=1-0=1,$$

故3个实根分别在区间$(-3, -2)$，$(0, 1)$，$(3, 4)$内。

象例2这样，把不同的实根分隔在不同的互不交叉的区间内，就是根的隔离。这是本节提出的第三个问题。

为了隔离方程的根，首先求出实根的上界和下界，然后在区间（M，N）内（M——根下界，N——根上界），找出适当的分隔点，例如取整数点，列出该方程对应多项式的斯图姆组，以及在各分隔点的变号数。变号数差1的区间内必有一个实根。若一个区间两端变号数差2，说明中间有两个根，可在中间找一个点（如中点），计算这一点的变号数。若发现两小区间内各有一根，那就算隔离开了；若两个根同时落在一个小区间里，必须再找新的分隔点，直至把两个根分隔开为止。

例3 试隔离方程$f(x)=4x^4-12x^2-8x-1=0$的实根。

解：（1） 求方程实根的上、下界。

先求上界。由§6.1定理2，$a_0=4$，$B=12$，$k=2$，所以上界$N=1+\sqrt[2]{\frac{12}{4}}=1+\sqrt{3}<3$。

再求下界。作根的反号变换，化为

$$4x^4-12x^2+8x-1=0.$$

其正根上界为$1+\sqrt[2]{\frac{12}{4}}=1+\sqrt{3}<3$，因而原方程负根下界（即实根下界）为$-3$。

（2） 求出$f(x)$的斯图姆组。

$$f(x)=f(x)=4x^4-12x^2-8x-1,$$

$$f_1(x)=f'(x)=8(2x^3-3x-1),$$

$f_2(x)=6x^2+6x+1$,

$f_3(x)=2x+1$,

$f_4(x)=1$。

（3） 求分隔点的变号数。

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	$V(x)$
$-\infty$	+	−	+	−	+	4
−3	+	−	+	−	+	4
−2	+	−	+	−	+	4
−1	−	0	+	−	+	3
0	−	−	+	+	+	1
1	−	−	+	+	+	1
2	−	+	+	+	+	1
3	+	+	+	+	+	0
∞	+	+	+	+	+	0

说明方程共有4个实根：在（2，3）内一个；（−1,0）内两个；（−2，−1）内一个。为了把（−1，0）内两个实根隔离开来，须再求−0.5的变号数$V(-0.5)$。容易看出，$f_0(-0.5)>0, f_1(-0.5)<0, f_2(-0.5)>0, f_3(-0.5)=0$, $f_4(-0.5)>0$，所以$V(-0.5)=2$。

故在$(-1, -0.5)$和$(-0.5, 0)$内各有一实根。

例 4 用斯图姆方法讨论实系数方程

$$x^3+px+q=0 \quad (p\neq 0)$$

的实根个数与系数之间的关系。

解：设$f(x)=x^3+px+q$，

作出$f(x)$的斯图姆组：

$$f_0(x)=x^3+px+q,$$

$$f_1(x)=f'(x)=3x^2+p,$$

$$f_2(x)=-2px-3q,$$

$$f_3(x)=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

（1）当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$时，$f_0(-\infty)<0, f_1(-\infty)>0$，$f_2(-\infty)<0$或$>0$，$f_3(-\infty)<0$；$f_0(+\infty)>0$，$f_1(+\infty)>0$，$f_2(+\infty)>0$或$<0$，$f_3(+\infty)<0$。

其中$f_2(\pm\infty)$的符号由p的符号而定，但显然$f_2(\pm\infty)$的符号不管如何，$V(-\infty)=2$，$V(+\infty)=1$是不变的。因而在这种情况下$f(x)$有一个实根。

（2）当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$时，$\frac{p^3}{27}<-\frac{q^2}{4}\leqslant 0$，故$p$为负数。$f_0(-\infty)<0$，$f_1(-\infty)>0$，$f_2(-\infty)<0$，$f_3(-\infty)>0$；$f_0(+\infty)>0$，$f_1(+\infty)>0$，$f_2(+\infty)>0$，$f_3(+\infty)>0$。故$V(-\infty)=3$，$V(+\infty)=0$，$V(-\infty)-V(+\infty)=3$。

这种情况下，有三个不同的实根。

（3）当$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$时，$(f(x), f'(x))=2px+3q$。

这时$x=-\frac{3q}{2p}$是原方程的重根，另一个根也是实根。

所得结果与§5.4是一致的。

注意：在隔离实根时，假定已经知道方程$f(x)=0$在某

区间(a, b)内恰好有一个实根，要想进一步缩小这一区间，只看$f(x)$本身的符号就可以了。如(a, b)中有a_1和b_1，使$f(a_1)$与$f(b_1)$异号，说明这个根在a_1与b_1之间，因而可将原区间(a,b)缩小为(a_1, b_1)。

这样，有的读者可能认为只看$f(x)$在某些点的符号，就可以发现根所在的区间，因而不必涉及繁琐的斯图姆方法。

这种想法，在一般情况下是行不通的。单由$f(x)$在某区间(a, b)两端同号不能断定其中无根，因为也可能其中有偶数个根；同样，$f(x)$在区间(a, b)的两端异号也只说明其中有奇数个根，不一定恰有一个根。如有方程

$$f(x)=9x^3-61x+60=0.$$

做出下面的函数表：

x	0	1	2	3
$f(x)$	60	8	10	120

又当$x>3$时，显然$f(x)>0$，不会有根。这样就可能产生一个错觉，认为$f(x)$没有正根。然而，实际上有两个根"藏"在区间(1, 2)内，这可由斯图姆方法检验出来。

所以斯图姆方法是必不可少的。

习 题 6.3

1.试求方程

$$x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$$

的实根总个数。

2.证明方程

$$x^4+x^3-x^2-2x+4=0$$

无实根。

3.试求方程

$$x^4-3x^3-2x^2+7x+3=0$$

（1）实根总个数；（2）正根及负根个数。并将其实根隔离开。

4.试求方程

$$4x^4-12x^2-8x-1=0$$

中绝对值大于1及绝对值小于1的实根个数。

5.试分离下列方程的实根：

（1） $x^3-7x+7=0$；（2） $x^4-x-1=0$；

（3） $x^3-3x-1=0$；（4） $x^4-x^3-2x+1=0$。

6.用斯图姆方法讨论实二次方程

$$x^2+px+q=0。$$

的实根个数与p、q之间的关系。

7.用斯图姆方法讨论方程$x^n-1=0$ ($n>1$) 的实根个数与n的关系。

§6.4 实根的近似计算

本节是这一章的最后终结，讨论实根的近似计算。首先，需要明确一下什么是实根的近似值。

定义 1 若 α 是某一实系数方程

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

的实根，ε 是一个给定的正数，若有一个实数 a，满足条件

$$|a-\alpha|\leqslant\varepsilon, \qquad (2)$$

则称 a 为根 α 的精确到 ε 的近似值。如1.41是方程$x^2-2=0$

的根精确到0.005的近似值，1.414是精确到0.0005的实根近似值。

求实系数方程实根的近似值，即实根的近似计算，有许多方法，下面只介绍三种重要而且简便的方法：秦九韶方法、牛顿法和线性插值法。

以下仍假定$f(x)$无重根。

一、秦九韶方法

这个方法是我们宋代数学家秦九韶1247年提出的，载于《数书九章》一书中。国外文献常称之为霍纳方法（见§2.5〔注〕），但实际上霍纳提出这个方法是19世纪初，比秦九韶晚了五个多世纪。

秦九韶方法的基本思想很简单：

假定已知方程（1）在2和3之间有一个实根，作根的平移变换，使新方程的根为原方程的根减2，则新方程在0和1之间有一个根。把区间（0，1）分为十等份，看根在0，0.1，0.2，…，0.9，1中哪两个数之间。比如在0.7和0.8之间，再作根的平移变换，使第三个方程的根为第二个方程的根减0.7，那末，第三个方程在0.0和0.1之间必有根。同样，把（0.0，0.1）分为十等份，看根在哪一个小区间内，设在0.04和0.05之间，那末2.74和2.75就是根的精确到0.01的近似值。前者是不足近似值，后者是过剩近似值。若精确度不够，再作根平移变换，如此继续下去，直至达到给定的精确度。

例1 已知方程$x^3-x-9=0$无重根，在区间（2，3）内有一实根。试求根的精确到0.01的近似值。

解：作根的平移变换$y=x-2$。

新方程可用连续的综合除法求得：

	1	0	−1	−9
2		2	4	6
	1	2	3	−3
		2	8	
	1	4	11	
		2		
	1	6		

$\phi(y)\equiv y^3+6y^2+11y-3=0$是新的方程，它在(0,1)内有一实根。为了断定根在(0.0, 0.1)，(0.1, 0.2)，…，(0.9, 1.0)哪个区间内，我们算出$\phi(y)$在各分隔点的符号。发现$\phi(0.2)$与$\phi(0.3)$符号相反，由于$f(x)$没有重根，因而，$\phi(y)$也没有重根，$\phi(y)$在(0.2, 0.3)内必有一根。再作根平移变换$z=y-0.2$。化为方程

$$\psi(z)\equiv z^3+6.6z^2+13.52z-0.552=0.$$

$\psi(z)$的根在(0.0, 0.1)内，把(0.0, 0.1)分成十等份：(0.00, 0.01)，(0.01, 0.02)，…，(0.09, 0.10)。看根在哪个区间内，即看$\psi(z)$在哪个小区间的端点反号。经计算，$\psi(0.04)$和$\psi(0.05)$反号，故$\psi(z)$的根在(0.04, 0.05)内。

所以，原方程根的精确到0.01的近似值为2.24（或2.25）。

二、牛顿法

假定方程(1)在区间$[a,b]$内仅有一个实根α，由于$f(x)$无重根，则$f'(\alpha)$必不等于零。

另外，我们再假定$f''(\alpha)\neq 0$。因为若碰巧$f''(\alpha)=0$，即α同时是$f''(x)$的根，则可将求$f(x)$的根的问题改为求$f''(x)$的根的问题。

选取区间$[a,b]$充分小，使在这个区间上$f'(x)$和$f''(x)$都没有根（因为可以通过隔离$f'(x)$和$f''(x)$的根，选出一个包含α的区间，该区间上$f'(x)$及$f''(x)$无根）。因而它们在$[a,b]$上保持符号不变（因若$f'(x)$或$f''(x)$在区间$[a,b]$符号不同，由于f'和f''都是连续函数，故在$[a,b]$内必有对应的点，使$f'(x)$或$f''(x)$的值等于零，推得$f'(x)$或$f''(x)$在$[a,b]$内有根）。同时，$f(a)$与$f(b)$符号相反（因若符号相同，则在$[a,b]$内必有一点c使$f'(c)=0$。即c是$f'(x)$的根，与$f'(x)$在$[a,b]$内无根矛盾）。

下面，借助图形介绍牛顿法的基本思想。

假定$y=f(x)$的图象如图8所示。

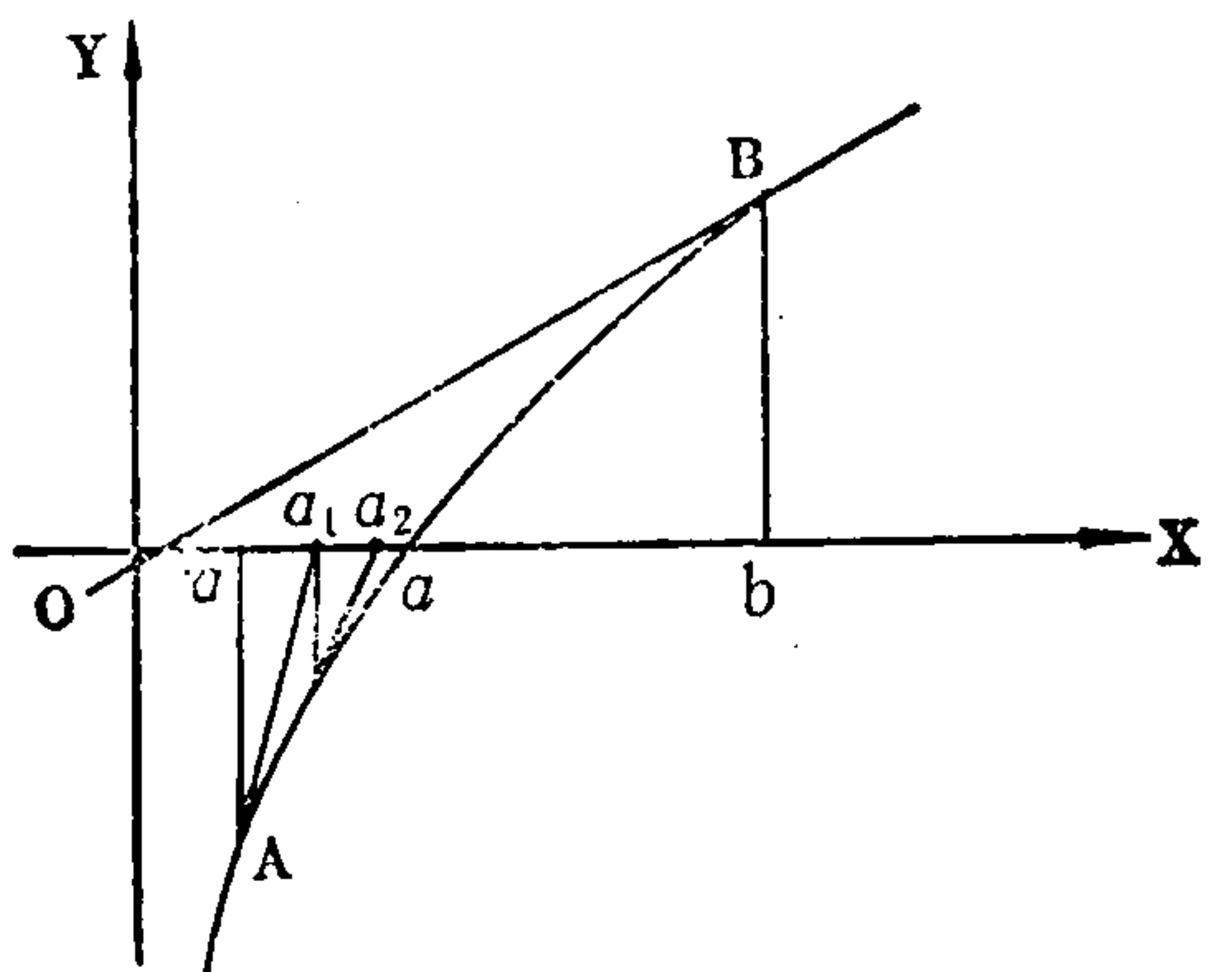


图 8

曲线与x轴的交点就是根α。我们过曲线上的已知点$A(a,f(a))$作曲线的切线Aa_1，交x轴于a_1点（a_1点的坐标也

记之a_1)。过曲线上的点$(a_1, f(a_1))$,再作曲线的切线,交x轴于a_2点，这样作下去，点$a, a_1, a_2, \cdots$将无限地接近α。这时，a称为α的0次近似值，a_1称为1次近似值，a_2称为2次近似值，…。当n足够大时，a_n可以达到任意的精确程度.

如果我们一开始不是选a,而是选b为0次近似值，且过点$B(b, f(b))$作曲线的切线，这时，由图8可见，交点甚至可以“跑”到区间$[a, b]$外面，显然这是不能允许的。

所以，区间两个端点只有一个可作α的0次近似值，另一个则不合用。那末哪一个端点合用，哪一个不合用呢？由图8可见，a和b两点有这样的区别：曲线的凸面向着a点，而曲线的凹面向着b点。由数学分析的知识知道，凸面向上的$f''<0$，凸面向下的$f''>0$。因此，凸面所朝向的端点a的二阶导数值$f''(a)$与$f(a)$同号。另一个端点b则有相反的特性，$f''(b)$与$f(b)$异号。因而应选f的函数值与f''同号的那个端点为0次近似值。

下面找出递推公式。

首先算出a_1点的坐标。直线Aa_1的点斜式方程为$y-f(a)=f'(a)(x-a)$，a点导数$f'(a)$是该直线的斜率。这条直线与x轴交点(a_1, o)的横坐标a_1，满足等式

$$0-f(a)=f'(a)(a_1-a),$$

故 $a_1=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$。 同样可求出：

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)};$$

$$a_3=a_2-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)};$$

……

（由于$f'(x)$在$[a, b]$区间无根，所以以上各式都是有意义的）

按照上面的程式，不难由a开始逐步得出任意的a_i。这种递推公式，也称为迭代公式。

同样，在$f''(b)$和$f(b)$同号时，就要取b为α的0次近似值。根据相类似的推异，可得：

$$a_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)};$$

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}; \quad \cdots\cdots$$

一般地有 $a_i = a_{i-1} - \dfrac{f(a_{i-1})}{f'(a_{i-1})}$.

例2 用牛顿法计算$x^3 - 2x - 5 = 0$在$[2,3]$内的根α的近似值，并估计其误差。

解： 先求f'和f''：

$f'(x) = 3x^2 - 2$，$f''(x) = 6x$.

在$[2,3]$上恒有$f'(x) > 0$及$f''(x) > 0$，故f'及f''无根，符合牛顿法的要求。而$f(2) = -1 < 0$，$f(3) = 16 > 0$，所以$f''(3)$与$f(3)$同号。应取$b = 3$为0次近似值。

$$a_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{16}{25} = 2.36,$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 2.36 - \frac{f(2.36)}{f'(2.36)} = 2.127.$$

现在估计2.127的误差。

由于$f(2.127)>0$，$f(2.120)<0$，所以根α在2.120与2.127之间。取$\frac{2.120+2.127}{2}=2.1235$为$\alpha$的近似值，其误差不大于$\frac{2.127-2.120}{2}=0.0035$。或说2.1235是$\alpha$的精确到0.0035的近似值。

例3 已知方程$x^3+3x^2-1=0$在区间$[-3,-2.5]$内有一个实根，试求它的近似值，并估计它的误差。

解： 设$f(x)=x^3+3x^2-1$，

则 $f'(x)=3x^2+6x$，$f''(x)=6x+6$。

在区间$[-3,-2.5]$，$f'(x)$和$f''(x)$均无根，且在此区间上$f''(x)<0$。而$f(-3)<0$，$f(-2.5)>0$，故$a=-3$可取作0次近似值：

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=-3-\frac{(-1)}{9}=-\frac{26}{9}=-2.89,$$

由于$f(-2.89)<0$，但$f(-2.84)>0$，故方程的根$\alpha\in(-2.89,-2.84)$。取$\frac{(-2.89)+(-2.84)}{2}=-2.865$为$\alpha$的近似值，则误差不大于

$$\frac{(-2.84)-(-2.89)}{2}=0.025.$$

注意： 上面两例本身并未提出误差的大小，而由我们在计算中进行估计，但一般的实际问题，却是先给定误差（或精确度），然后来确定迭代的次数，遇到这种问题，应该在作过几次迭代后，用上述方法检验精确度，误差太大就再继续迭代，直到满足要求为止。

三、线性插值法

牛顿法也叫“切线法”，是用切线代替曲线来求实根的近似值，下面我们介绍的方法，是用弦代替曲线来求实根的近似值，所以称为“弦线法”，又称为线性插值法，有时也叫做拉格朗日（*Lagrange*）法。

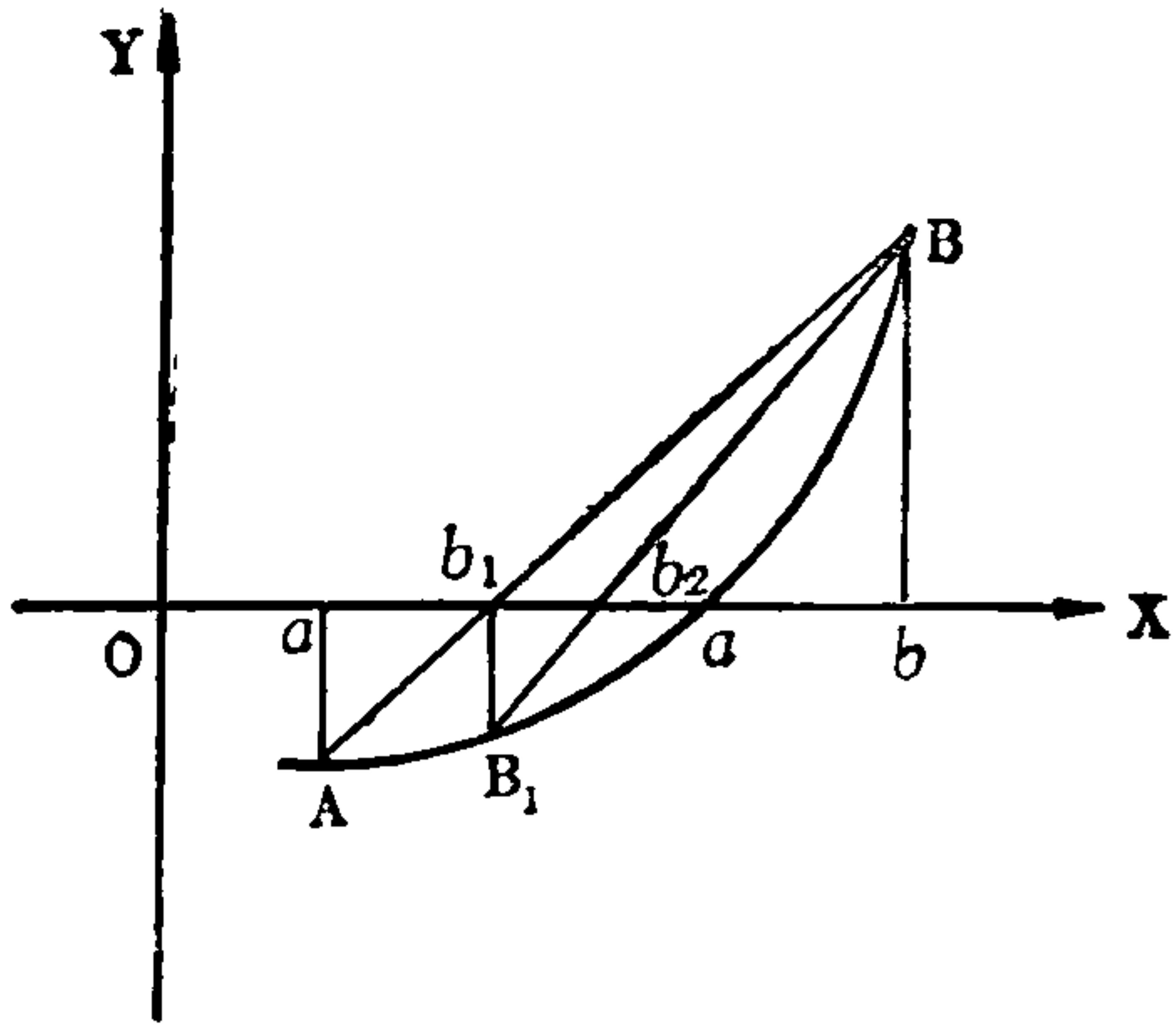


图 9

先从几何上看这个方法的基本思想。

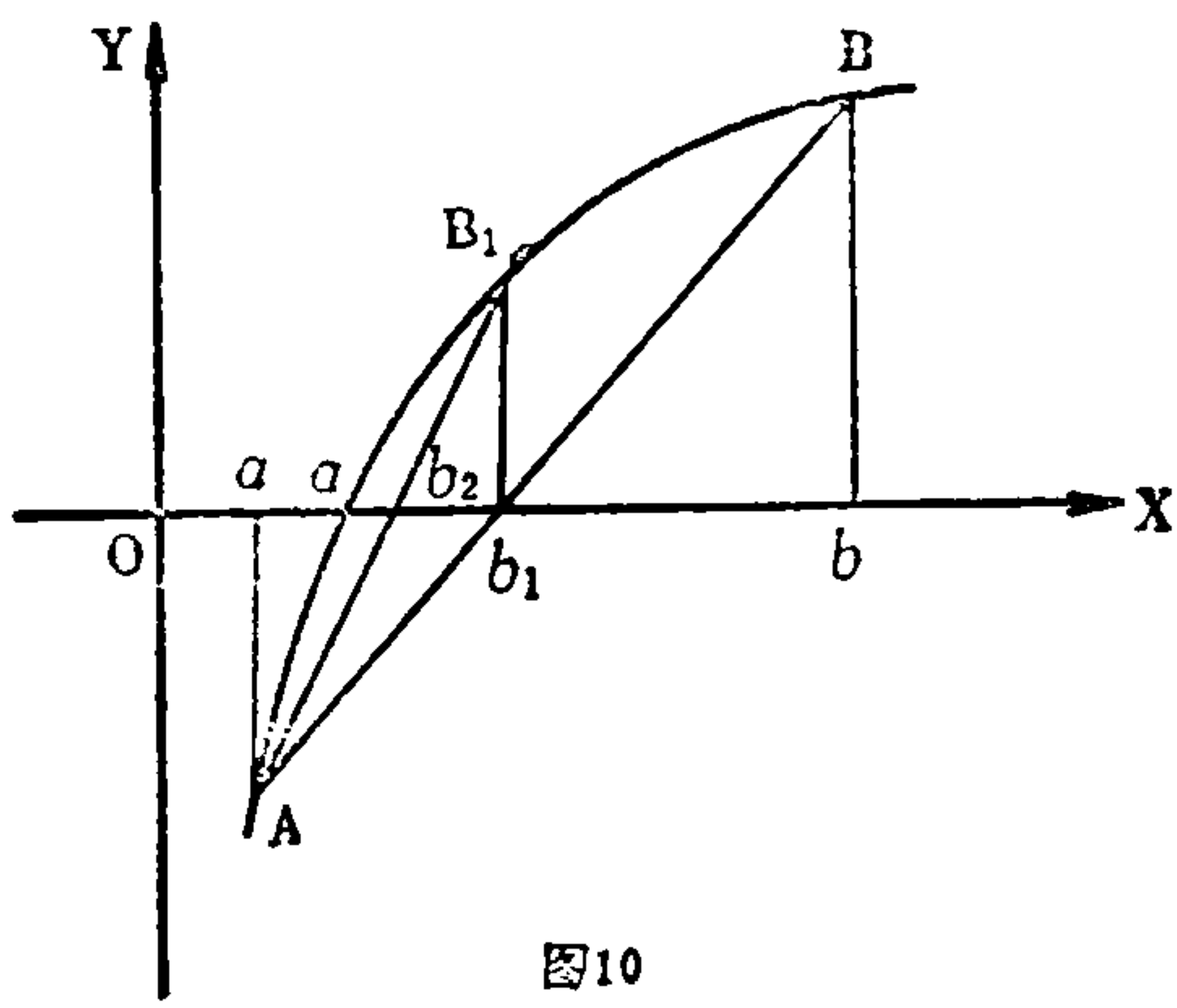


图10

假定实系数多项式$f(x)$在区间$[a,b]$有唯一的根α，$f'(x)$和$f''(x)$在$[a,b]$内无根，即各自保持符号不变，连接曲线$y=f(x)$的两点$A(a, f(a))$与$B(b,$

$f(b)$)。设弦AB与x轴交点为b_1(其坐标也记为b_1,下同),b_1作为根α的一次近似值，为了求出进一步的近似值,须分两种情况讨论（见图9、10）

第一种情况：$f(b_1)$与$f(b)$异号（图9）。

连接弦B_1B，交x轴于b_2，b_2为α的二次近似值，依次进行下去，可得α的一系列近似值。这时，取a作为0次近似值。

第二种情况：$f(b_1)$与$f(a)$异号（图10）。

连接弦AB_1，交x轴于b_2，b_2为α的二次近似值，也同第一种情况一样，依次可得α的一系列近似值。不过，这时应取b为α的0次近似值。

那末,从$f(x)$及$f''(x)$的符号上怎样区分这两种情况呢?

容易看出，在第一种情况下，a点在曲线$y=f(x)$凹面的一侧，这时，$f(a)$与f''异号；而第二种情况是b点在凹面一侧，这时，$f(b)$与f''异号。无论哪种情况，都是取$f(x)$的函数值与f''异号的那个端点作为0次近似值（与牛顿法恰好相反）。

下面找出递推公式。

1．当$f(a)$与f''异号时。

直线AB的两点式方程为

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

令$y=0$，可得弦AB与X轴交点b_1的坐标

$$b_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a);$$

同理

$$b_2=b_1-\frac{f(b_1)}{f(b)-f(b_1)}(b-b_1);\quad \cdots\cdots$$

一般地，有

$$b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f(b) - f(b_{i-1})}(b - b_{i-1}). \tag{3}$$

2. 当$f(b)$与f''异号时。

类似地可求得

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a);$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f(b_1) - f(a)}(b_1 - a); \quad \cdots\cdots$$

一般地，有

$$b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a)}(b_{i-1} - a). \tag{4}$$

在两种情况下，序列。

a(或b)，b_1，b_2，……

都是从曲线的凹面单调地收敛于根α。而牛顿法的近似值序列

b（或a），a_1，a_2……

都是从曲线凸的一面单调地收敛于根α。因而根α在下面的一串区间套的内部：

$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots\cdots$

这里a_0代表牛顿法的0次近似值，b_0代表线性插值法的0次近似值。b_0和a_0正好各取端点a或b中的一个，但不相同。顺便指出，上述区间$[a_i, b_i]$不一定$a_i < b_i$，也可能$b_i < a_i$。

取区间$[a_i, b_i]$的中点$\frac{a_i + b_i}{2}$作为α的近似值时，精确度很好估算，因为此时根α与$\frac{a_i + b_i}{2}$的差的绝对值不会

超过区间$[a_i, b_i]$的一半，即$\frac{|b_i-a_i|}{2}$。

在实际计算中，往往把牛顿法与线性插值法联合起来使用。在联合计算之前，应先用斯图姆方法把实根分离在尽量小的区间内，然后，最好再用秦九韶方法进一步缩短隔离区间。

例4 求方程

$$x^5+2x^4-2x^3-8x^2+7x-3=0$$

的实根近似值。

解：(1) 求实根个数及大体位置。

用斯图姆方法(过程从略)计算，得知该方程只有一个实根α在(1,2)内。

(2) 用秦九韶方法缩小隔离区间。

经计算(过程从略)，知α在(1.4,1.5)内。

(3) 用联合法进一步计算。

在区间(1.4,1.5)内，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，而$f(1.4)<0$，$f(1.5)>0$，因而牛顿法的0次近似值应选1.5，而拉线性插值的0次近似值，应选1.4。

牛顿法的1次近似值：

$$a_1=1.5-\frac{f(1.5)}{f'(1.5)}=1.5-\frac{0.4675}{21.8125}=1.4785.$$

线性插值法的1次近似值（属第一种情况）

$$b_1=1.4-\frac{f(1.4)(1.5-1.4)}{f(1.5)-f(1.4)}=1.4-\frac{-1.3066\times0.1}{1.7753}$$

$$=1.4735.$$

若取$\frac{a_1+b_1}{2}=1.4760$为根α的近似值，则误差不大于

$$\frac{|b_1-a_1|}{2}=0.0025.$$

如果需要更精确的近似值，可用这种方法继续计算。

习　题　6.4

1.方程　$x^3-5x-3=0$ 有几个正根?求它的近似值，并估计其误差。

2.试求方程　$x^4+3x^3-9x-9=0$　在区间(1，2)内的实根近似值，并估计其误差。

3.试求方程　$x^4-10x^2-16x+5=0$ 在区间（0,1）内实根的近似值，并估计其误差。

本 章 提 要

设有实系数n次方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1{}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0>0).$$

1.实根界

(1)　正根上界的求法

① $N=1+\dfrac{A}{|a_0|}$，其中A是$|a_1|$，$|a_2|$，…，$|a_n|$中的最大数(这时只要求$a_0\neq0$).

② $N=1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$，其中$B$是$f(x)$负系数中绝对值最大的数，$a_k$是第一个负系数.

(2)　负根下界的求法:

原方程经根反号变换后，所得方程正根上界的反号为原方程负根下界.

(3)　正根下界的求法:

原方程经根倒数变换，得一新方程，其正根上界的倒数就是原方程正根的下界．

(4) 负根上界的求法：

原方程经根的负倒数变换得一新方程，其正根上界的负倒数即原方程负根的上界．

2．斯图姆定理

若实多项式$f(x)$无重根，且$f(a)\neq 0$，$f(b)\neq 0$，那末$f(x)$在(a, b)内实根的个数等于$V(a)-V(b)$，其中$V(x)$表示斯图姆组在x点的变号数．

3．实根的近似计算(假定$f(x)$无重根)

(1) 秦九韶方法：

① 利用斯图姆定理确定$f(x)$在区间$(a, a+1)$内有一实根；

② 作根的平移变换$y=x-a$，得方程$\phi(y)=0$，则$\phi(y)$有一根在(0，1)内；

③ 计算$\phi(0.0)$，$\phi(0.1)$，$\phi(0.2)$，…，$\phi(1.0)$，若$\phi(0.b)$和$\phi(0.b+0.1)$符号不同，说明$\phi(y)$有根在区间$(0.b, 0.b+0.1)$内．

然后再作根的平移变换$z=y-0.b$，得方程$\psi(z)=0$，则$\psi(z)$有一根在(0.0，0.1)内；

再计算$\psi(0.00)$，$\psi(0.01)$，…，$\psi(0.10)$，若$\psi(0.0c)$与$\psi(0.0c+0.01)$反号，说明$\psi(z)$有根在区间$(0.0c, 0.0c+0.01)$内．

上述过程一直进行下去，直至达到给定的精确度，实根$\alpha=a.bc\cdots$．

(2) 牛顿法：

① 利用斯图姆定理确定$f(x)$在区间(a, b)有一实根α，假定f'及f''在$[a, b]$无根．

② 若f''与$f(a)$同号，取a为根α的0次近似值，则n次近似值

$$a_n=a_{n-1}-\frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}; \quad (a_0=a)$$

若f''与$f(b)$同号，取b为根α的0次近似值，则n次近似值

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})} \cdot \quad (a_0 = b)$$

(3) 线性插值法

① 同牛顿法①

② 若f''与$f(a)$异号，取a为根α的0次近似值，则n次近似值

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})(b - b_{n-1})}{f(b) - f(b_{n-1})}; \quad (b_0 = a)$$

若f''与$f(b)$异号，则取b为α的0次近似值

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})(b_{n-1} - a)}{f(b_{n-1}) - f(a)}。 \quad (b_0 = b)$$

牛顿法与线性插值法联合使用，效果最好.

复 习 题 六

1.试求方程

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

正根及负根的个数.

2.试隔离下列方程的实根：

(1) $x^4 - 4x^2 + x + 1 = 0$;

(2) $x^4 - x^3 - 2x + 1 = 0$;

(3) $x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2 = 0$;

(4) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.

3.试求下列方程的虚根个数：

(1) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5 = 0$;

(2) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9 = 0$;

(3) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$;

(4) $x^4 + x^2 - 1 = 0$.

4.试求以下方程的正根上界、正根个数以及正根近似值：

(1) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$;

(2) $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$.

第七章　有理分式

本章讨论有理分式的概念和运算，并将详细地介绍分式展为最简分式之和的方法。

§7.1　一般概念

定义1　假设$f(x)$和$g(x)$都是数域P上的一元多项式，且$g(x)\neq 0(x)$，那末我们称形如$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的表达式为数域P上的有理分式，简称分式。$f(x)$和$g(x)$分别称为该分式的分子与分母。

大家知道，分数相等的意思为交叉相乘之积相等，即$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$当且仅当$ad=bc$。对于分式也有类似的定义。

定义2　数域P上的分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$和$\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$如果满足$f(x)\cdot\psi(x)=g(x)\phi(x)$，则称为相等的分式，记为$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$。

注意：分式的相等与作为函数相等稍有不同。假设$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$，$\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{x+1}{x-1}$，按照上面的规定应有$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$，但作为两个函数，却是不同的，因为第一

个分式对$x=-1$无意义，第二个分式对$x=-1$的函数值为零。然而对于两个相等的分式，除去分母的根外，其他的数代入后的函数值都相等。

性质1 若$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$，则$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$。

证明： 因为$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$，故

$$f(x)g_1(x)=g(x)f_1(x), \tag{1}$$

$$f_1(x)g_2(x)=g_1(x)f_2(x). \tag{2}$$

下面分两种情况分析：

(1) 若$f_1(x)=0(x)$，因$g_1(x)\neq 0(x)$，由(1)，(2)可得$f(x)=0(x)$，$f_2(x)=0(x)$。因而

$$f(x)g_2(x)=g(x)f_2(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)};$$

(2) 若$f_1(x)\neq 0(x)$，将(1)，(2)相乘，得

$$f(x)g_1(x)f_1(x)g_2(x)=f_1(x)g(x)f_2(x)g_1(x).$$

由于$f_1(x)g_1(x)\neq 0(x)$，两端消去$f_1(x)g_1(x)$，得

$$f(x)g_2(x)=g(x)f_2(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

性质2 若$h(x)\neq 0(x)$，则有

$$\frac{h(x)f(x)}{h(x)g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

即分式的分子及分母可以同时约去非零公因式，或者说，分子及分母可同乘以非零多项式。

证明： 由分式相等的定义直接推得。

例1 化简分式 $\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^3+9x^2+26x+24}$.

（化简分式是指将分子及分母同时约去非零次的公因式，即进行约分）

解：分子分解为 $(x+1)(x^3+9x^2+26x+24)$，原分式 $=\frac{(x+1)(x^3+9x^2+26x+24)}{x^3+9x^2+26x+24}=\frac{x+1}{1}$.

由性质2，对于任何非零多项式$h(x)$，分式$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)}$. 因而，同一分式可以找到无穷多个与之相等的分式. 这无穷多个彼此相等的分式中，有一种最简单最重要的分式——既约分式.

定义3 若数域 P 上分式$\frac{f(x)}{g(x)}$的分子分母互素，则称$\frac{f(x)}{g(x)}$为既约分式.

如$\frac{x-2}{x+1}$，$\frac{x^2+x+1}{x^3+2}$，$\frac{1}{3x^2-2}$ 等都是既约分式.

性质3 数域 P 上的任意分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$都可以化为既约分式，且除了分子分母的非零常数因子外，是唯一的.

证明：$f(x)$和$g(x)$都是数域P上的多项式，可以求出它们的最大公因式$d(x)$. 设

$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$.

由于$g(x)\neq 0(x)$，故$d(x)\neq 0(x)$. 由性质2，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)d(x)}{g_1(x)d(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

根据§3.3性质2，$(f_1(x), g_1(x))=1$，故分式$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$是既约分式。

下面证明唯一性。

设$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$，其中$\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$也是既约分式，则由$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$得$f_1(x)g_2(x)=g_1(x)f_2(x)$。由于$(f_1(x), g_1(x))=1$，故$g_1(x)|g_2(x)$。

设$g_2(x)=g_1(x)h(x)$，因此，我们得到

$$f_1(x)g_1(x)h(x)=f_2(x)g_1(x).$$

约去$g_1(x)$（由于$g_1(x)\neq 0(x)$），得

$$f_1(x)h(x)=f_2(x).$$

所以$h(x)$是$f_2(x)$与$g_2(x)$的公因式。但$\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$是既约的，故$h(x)$只能是零次多项式，即非零常数。性质得证。

化简分式的具体方法，在中学里已学过，这里不再赘述。

习 题 7.1

1.化下列分式为既约分式：

（1）$\frac{1-x^2}{(1+2x)^2-(2+x)^2}$；

（2）$\frac{3x^4-14x^3-20x^2-23x-6}{6x^4-11x^3-14x^2-20x-3}$；

（3）$\frac{x^2+x-6}{5x^4-13x^3+6x^2+12x-24}$；

(4) $\dfrac{x^4+2(c-b)x^2-2bd^2+2cd^2-d^4}{x^4-4bx^2-4c^2+4cd^2+4b^2-d^4}$；

(5) $\dfrac{x^n+2x^{n-1}-x^{n-3}-2x^{n-4}}{x^{n+3}+x^{n+2}-x^n+x^{n-2}+x^{n-3}}$，$(n\geqslant 4)$；

(6) $\dfrac{4a^4-a^2(4a^2+2ax-x^2)+a(2ax-x^2)}{a^nx^2-4a^{n+2}}$，$(n\geqslant 1, a\neq 0)$；

(7) $\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$，（n和m为正整数）.

2. 求证本节性质 2.

3. 下列表达式是否有理分式？为什么？

(1) $\dfrac{2^x-3^x}{2^x-3^{-x}}$；

(2) $\sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}+x\right)$；

(3) $\dfrac{tgx-x}{\sin 2x+tgx}$；

(4) $\dfrac{2}{0}$；

(5) $\dfrac{x-2}{(x+1)^2-x^2-2x-1}$.

4. 由分式相等的定义证明：

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$；

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$，则 $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

§7.2 有理分式的运算

上节采用形式定义的方法引入了有理分式，下面建立分

式的运算法则，同时证明相应的性质。

一、加法

定义1 设$\frac{f(x)}{g(x)}$和$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$为数域P上的有理分式，规定其和为

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+\phi(x)g(x)}{g(x)\psi(x)}. \quad (1)$$

如$\frac{3x+2}{2x+1}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{(3x+2)(x-1)+(x+2)(2x+1)}{(2x+1)(x-1)}$

$=\frac{5x^2+4x}{2x^2-x-1}$.

同一分式可以不止表示成一种形式，设$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}$.如果根据定义1，$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}$不与$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$相等，就说明定义1的规定不合理，原因是运算结果不唯一。为此，必须补证定义1的合理性，即下述引理：

引理1 若$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}$，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

证明：由条件，$f(x)g_1(x)=f_1(x)g(x)$，

$\phi(x)\psi_1(x)=\phi_1(x)\psi(x)$.

则 $[f(x)\psi(x)+\phi(x)g(x)]g_1(x)\psi_1(x)$

$=f(x)\psi(x)g_1(x)\psi_1(x)+\phi(x)g(x)g_1(x)\psi_1(x)$

$=f_1(x)g(x)\psi(x)\psi_1(x)+\phi_1(x)\psi(x)g(x)g_1(x)$

$$=[f_1(x)\psi_1(x)+\phi_1(x)g_1(x)]g(x)\psi(x),$$

或 $$\frac{f(x)\psi(x)+\phi(x)g(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_1(x)\psi_1(x)+\phi_1(x)g_1(x)}{g_1(x)\psi_1(x)},$$

也即 $$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

证毕。

有理分式的加法满足通常的算律，即交换律和结合律，也称加法的可易性和可群性。

性质1 （加法交换律）

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}+\frac{f(x)}{g(x)}.$$

证明：由加法定义，上式左端化为

$$\frac{f(x)\psi(x)+\phi(x)g(x)}{g(x)\psi(x)}；\text{右端}=\frac{\phi(x)g(x)+f(x)\psi(x)}{\psi(x)g(x)}.$$

以上两分式相等，这是因为多项式的加法与乘法满足交换律。

性质2 （加法结合律）

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right]+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{g_2(x)}{f_2(x)}\right].$$

证明：由加法定义，上式左端化为

$$\frac{f(x)g_1(x)+f_1(x)g(x)}{g(x)g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

$$=\frac{f(x)g_1(x)g_2(x)+f_1(x)g(x)g_2(x)+f_2(x)g(x)g_1(x)}{g(x)g_1(x)g_2(x)}$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{f_1(x)g_2(x)+f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{g_2(x)}{f_2(x)}\right].$$

性质得证。

二、乘法

定义2 设$\frac{f(x)}{g(x)}$和$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$为数域P上的有理分式，规定其积为

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\phi(x)}{g(x)\psi(x)}. \tag{2}$$

如$\frac{3x+2}{2x+1}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{(3x+2)(x+2)}{(2x+1)(x-1)}=\frac{3x^2+8x+4}{2x^2-x-1}$.

分式的乘法，也满足交换律和结合律。

性质3 （乘法的交换律）

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}.$$

性质4 （乘法的结合律）

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right]\cdot\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\left[\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right].$$

以上两个性质可由分式相等的定义及乘法的定义推得，推导过程留给读者作为练习。

此外，乘法对加法还满足分配律。

性质5 （分配律）

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right]\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

证明： 左端$=\frac{f(x)g_1(x)+f_1(x)g(x)}{g(x)g_1(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$

$$=\frac{f(x)g_1(x)\phi(x)+f_1(x)g(x)\phi(x)}{g(x)g_1(x)\psi(x)}=\frac{f(x)\phi(x)}{g(x)\psi(x)}$$

$$+\frac{f_1(x)\phi(x)}{g_1(x)\psi(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\text{右端}.$$

证毕。

如同加法那样，也要补证乘法定义的合理性，即证明下述引理（读者自证）：

引理2 若$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}$，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

三、减法

定义3 满足$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$的分式$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，称为$\frac{f(x)}{g(x)}$减$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$的差，记为$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$.

注意：单从定义 3 并不能说明差的存在和唯一，为此，必须证明以下定理：

定理1 $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$是存在且唯一的，同时

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{[-\phi(x)]}{\psi(x)}$$

分析：把减法归于加法。

证明：首先，令$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{[-\phi(x)]}{\psi(x)}$，则显然

$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{[-\phi(x)]}{\psi(x)}+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$. 因而差是存在的。

下面证差唯一：若$\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$也是差，则有

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

两端同时加上$\frac{[-\phi(x)]}{\psi(x)}$得

$$\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{[-\phi(x)]}{\psi(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

证毕。

分式$\frac{0(x)}{g(x)}$称为零分式。显然，任意两个零分式相等。另外，任何分式加零分式仍然不变；任一分式乘零分式得零分式；任意两相等的分式之差为零分式。

四、除法

定义4 设$\frac{f(x)}{g(x)}$和$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$为数域P上的有理分式，$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$不是零分式，则满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

的分式$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$称为$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$除$\frac{f(x)}{g(x)}$的商，或$\frac{f(x)}{g(x)}$被$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$除的商，记为

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\div\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

下面的定理证明商的存在与唯一，并建立除法与乘法的关系。

定理2 $\frac{f(x)}{g(x)}\div\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\left(\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\text{不是零分式}\right)$是存在且唯

一的，同时

$$\frac{f(x)}{g(x)}\div\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\phi(x)}.$$

证明：首先，$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\phi(x)}$是商。

事实上，$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\cdot\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right]=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right]$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

其次，商是唯一的。

设$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$为其商，则由商的定义

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

两端同时乘上分式$\frac{\psi(x)}{\phi(x)}$，得

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

证毕。

当分式用与其相等的分式代替时，商保持与原来相等。这可由定理2看出。

五、有理分式域

综上所述，我们引进了数域P上有理分式的四种运算，即加法、减法、乘法和除法。不难看出，数域P上有理分式的和、差、积、商（除式是非零分式）仍是同数域上的有理分式。

定义5 数域P上全体有理分式，称为数域P上的有理分

式域，记为$P(x)$。

注意：$P(x)$不要与多项式$p(x)$以及多项式环$P[x]$的记号相混。

下面来看$P(x)$与$P[x]$的关系。

我们将多项式$f(x)$就看作分式$\frac{f(x)}{1}$，这时，按分式的运算法则来算，与按多项式原来的运算法则来算，其结果完全一致。

例如，设$f(x)+g(x)=s(x)$，$f(x)-g(x)=d(x)$，$f(x)g(x)=k(x)$则按分式运算法则有：

$$\frac{f(x)}{1}+\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 1}{1^2}=\frac{f(x)+g(x)}{1}=\frac{s(x)}{1};$$

$$\frac{f(x)}{1}-\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)}{1}+\frac{[-g(x)]}{1}$$

$$=\frac{f(x)\cdot 1+[-g(x)]\cdot 1}{1^2}=\frac{f(x)-g(x)}{1}=\frac{d(x)}{1};$$

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)g(x)}{1^2}=\frac{k(x)}{1}.$$

因此，以后就把$\frac{f(x)}{1}$写成$f(x)$。

在分式域中任意两个多项式可以相除（零分式不能当除式），但这在多项式环中作不到。用$g(x)$除$f(x)$，在$P(x)$中有唯一的商$\frac{f(x)}{g(x)}$。

事实上，$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{1}=f(x)$。这里假定$g(x)\neq 0(x)$。

所以可以把$P(x)$看作是$P[x]$的扩张，它们之间的关系

与有理数域Q关于整数环Z的关系类似，许多概念、法则和性质是相似的，大家可以自行对照。

六、例题

例1　计算$\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}+1\right)$。

解：原式$=\dfrac{x-2}{x}\cdot\dfrac{(x-2)-(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-3x+1}{x(x-1)}.$$

例2　计算

$$\left[\frac{1}{3}\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]\div\frac{x^2-x-12}{3x^2+12x-36}.$$

解：原式$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^6+x^4-x^4-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^3-4x^2+x-4}{x^7+6x^6-x-6}$

$$\div\frac{x^2-x-12}{3x^2+12x-36}$$

$$=\frac{(x^6-1)(x-4)(x^2+1)3(x+6)(x-2)}{3(x^2+1)(x+6)(x^6-1)(x-4)(x+3)}$$

$$=\frac{x-2}{x+3}.$$

例3　求以下n个多项式之积：

$$f(x)=(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\cdots\left(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}\right).$$

分析：$f(x)$是多项式，也可看作分式

$$f(x)=f(x)\cdot\frac{x^2+ax+a^2}{x^2+ax+a^2}.$$

解：$f(x)=f(x)\cdot\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^2+ax+a^2}$

$$=\frac{(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\cdots}{x^2+ax+a^2}$$

$$\cdot\,(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})$$

$$=\frac{(x^4+a^2x^2+a^4)(x^4-a^2x^2+a^4)\cdots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})}{x^2+ax+a^2}$$

$$=\frac{(x^8+a^4x^4+a^8)\cdots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})}{x^2+ax+a^2}$$

$$=\frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}.$$

习　题　7.2

1.计算：

（1）$\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^3}}}\div\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{x^6+x^3+x}$；

（2）$\left(\dfrac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\dfrac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x-1}{a}-\dfrac{x}{a^2}\right)$；

（其中$a\neq0$）

（3）$\left(\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}+\dfrac{x^2+3x+1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)\div\dfrac{-2x^3+x^2-2x+1}{2x^3+x^2+2x+1}$；

（4）$\left(\dfrac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\dfrac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right)\div\dfrac{1+x}{x^3+x^4+x^5}$

$$-\frac{1-x+x^2}{x^3}\Big).$$

2.证明：

（1）$\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{c-b}{x-a}+\dfrac{a-c}{x-b}+\dfrac{b-a}{x-c}$;

（2）$\dfrac{x^2-1}{x(x-1)+1}$与$\dfrac{1-2x}{x(1-x)-1}$之和等于其立方和；

（3）$\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}+\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$

$$-\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2+3}{x^4-1}=\text{零分式}.$$

3.证明（利用分式乘法定义）：

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot h(x)=\dfrac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)}$；

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=f(x)$.

4.证明性质3、4及引理2.

§7.3 数域P上的最简分式

本节介绍最简分式的一般概念，以及任意分式化为最简分式的方法. 首先，引入真分式的概念.

一、真分式

我们知道，分数中有真分数、假分数，同样，分式也分为真分式和假分式.一个非零分式是真分式还是假分式，主要看分子与分母次数哪个高.

定义1 如果数域P上分式$\frac{f(x)}{g(x)}$的分子$f(x)$为$0(x)$，或者次数低于分母$g(x)$的次数，则称$\frac{f(x)}{g(x)}$为真分式，否则称为假分式.

如$\frac{0}{2x-1}$，$\frac{3x+1}{x^2-1}$，$\frac{2x^2-x+1}{x^3+x+2}$是真分式，而$\frac{x^2+1}{x^2-1}$，$\frac{3x^3+4x-2}{2x+3}$是假分式.

特别，一切非零多项式都可以看作假分式. 不仅如此，所有分式都可以表为多项式与真分式的和，正如任意分数可以写成整数（包括零）与真分数的和一样.

定理 1 任意分式$\frac{f(x)}{g(x)}$可表为多项式与真分式之和，且表示法是唯一的.

分析：用$g(x)$来除$f(x)$(带余除法)得余式和商式，因而原分式可表成多项式和真分式的和. 这是定理第一部分的证明.

唯一性的证明仍采用常用的方法，假定原分式又写成另一多项式和另一真分式的和，然后证其与前面得到的多项式和真分式对应相等.

证明：(1) 表示法的存在性.

用分母$g(x)$来除分子$f(x)$，可得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x).$$

其中$r(x)$或者是$0(x)$，或者次数低于$g(x)$(见§2.4定理1).

于是$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$，这里$\frac{r(x)}{g(x)}$为真分式，

因而原分式表为多项式与真分式之和。

（2）表示法的唯一性。

假定原分式又可表为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q_1(x)+\frac{r_1(x)}{g_1(x)},$$

其中$q_1(x)$为多项式，$\frac{r_1(x)}{g_1(x)}$为真分式，因而

$$q_1(x)+\frac{r_1(x)}{g_1(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

$$q(x)-q_1(x)=\frac{r_1(x)}{g_1(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}$$

$$=\frac{r_1(x)g(x)-r(x)g_1(x)}{g_1(x)g(x)},$$

$$[q(x)-q_1(x)]g_1(x)g(x)$$
$$=r_1(x)g(x)-r(x)g_1(x). \quad (1)$$

若（1）式右端$\neq 0(x)$，则显然右端的次数低于$g_1(x)$与$g(x)$的次数之和。但左端次数不低于$g_1(x)$与$g(x)$次数之和，推出矛盾。故（1）式右端$=0(x)$。（1）式左端$g_1(x)$和$g(x)$是分式的分母，自然不是$0(x)$。所以

$$q(x)-q_1(x)=0(x)，\text{或}q(x)=q_1(x)。$$

又由　$r_1(x)g(x)-r(x)g_1(x)=0(x)$，得

$$r_1(x)g(x)=r(x)g_1(x)。$$

因此　$$\frac{r_1(x)}{g_1(x)}=\frac{r(x)}{g(x)}.$$

证毕。

如分式$\frac{3x^4+2x^2-4x+6}{x^2-2x+3}=3x^2+6x+5+\frac{-12x-9}{x^2-2x+3}$。

其中$3x^2+6x+5$和$-12x-9$分别是用x^2-2x+3来除$3x^4+2x^2-4x+6$的商式及余式。

二、数域P上的最简分式

由上一段知道，任一分式可以唯一地表为一个多项式和一个真分式之和。这个真分式，我们还可以再进一步分解为若干形式更简单的分式——最简分式的和。

定义2 若$p(x)$是数域P上的不可约多项式，$f(x)$为数域P上次数低于$p(x)$次数的多项式，则形如

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}(k\geqslant 1)$$

的分式称为数域P上的最简分式或部分分式。

由此可见，最简分式的分母是不可约多项式的方幂，另外，由于$p(x)\nmid f(x)$，所以$p(x)$与$f(x)$互素，因而最简分式总是既约真分式。其次，最简分式不包括零分式。

形如$\frac{c}{(x-a)^k}$的分式(a，$c\in P$)是任意数域P上的最简分式。形如$\frac{cx+d}{(x^2+px+q)^k}$($c,d$，$p$，$q\in R$，$p^2-4q<0$)的分式是实数域上的最简分式，不是复数域上的最简分式，因为x^2+px+q是实数域上的不可约多项式，但不是复数域上的不可约多项式。

一个分式是否最简分式，与所论及的数域有关，这是因为不可约多项式是一个相对于数域的概念。如$\frac{2x}{(x^2-2)^2}$是有理数域上的最简分式，但不是实数域上的最简分式，这是

因为x^2-2在有理数域上不可约，但在实数域上可约：$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$。

是不是所有真分式都能展成最简分式的和呢？

定理2 数域P上任何真分式，都可展为该数域上最简分式之和。

分析：由于任意分式的分母是数域P上的多项式，根据§4.1定理1，可将其分解为数域P上的不可约多项式方幂的乘积，不同的不可约多项式的方幂互素。利用下面两个引理，先将原分式分成若干真分式的和，然后，再进一步剖分为一系列最简分式的和。

引理1 设$\dfrac{f(x)}{g(x)h(x)}$为真分式，分母的两个因子$g(x)$与$h(x)$互素，则原分式可表为两个真分式的和：

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}=\frac{v(x)}{g(x)}+\frac{u(x)}{h(x)}.$$

证明：由于$g(x)$与$h(x)$互素，由互素判别定理（§3.3定理1），存在多项式$u_1(x)$和$v_1(x)$，使$g(x)u_1(x)+h(x)\cdot v_1(x)=1$。

上式两端同乘$f(x)$，得

$$g(x)[u_1(x)f(x)]+h(x)[v_1(x)f(x)]=f(x). \qquad (2)$$

用$h(x)$来除$u_1(x)f(x)$，得余式$u(x)$和商式$q(x)$，

即 $u_1(x)f(x)=h(x)q(x)+u(x)$。

其中$u(x)$或者是$0(x)$，或者次数低于$h(x)$的次数。这样(2)式就可写成

$$g(x)u(x)+h(x)[v_1(x)f(x)+g(x)q(x)]=f(x).$$

令$v(x)=v_1(x)f(x)+g(x)q(x)$。即得

$$g(x)u(x)+h(x)v(x)=f(x)。\quad (3)$$

两端同除以$g(x)h(x)$，得

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}=\frac{v(x)}{g(x)}+\frac{u(x)}{h(x)}.$$

下面，只须证上式右端都是真分式。

首先，由于$u(x)$是$h(x)$除$u_1(x)f(x)$的余式，故$\frac{u(x)}{h(x)}$是真分式。为了证明$\frac{v(x)}{g(x)}$是真分式，将(3)改写成

$$h(x)v(x)=f(x)-g(x)u(x)。\quad (4)$$

一方面，因为$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$是真分式，另一方面，$\frac{g(x)u(x)}{g(x)h(x)}=\frac{u(x)}{h(x)}$也是真分式，故$f(x)$和$g(x)u(x)$或为$0(x)$，或比$g(x)h(x)$次数低。由(4)，左端$h(x)v(x)$也一定具有同样的性质，即分式$\frac{h(x)v(x)}{g(x)h(x)}=\frac{v(x)}{g(x)}$是真分式。

引理2 设有真分式$\frac{u(x)}{p^k(x)}$，其中$p(x)$为不可约多项式，$k\geqslant 1$，则有

$$\frac{v(x)}{p^k(x)}=\frac{s_k(x)}{p^k(x)}+\frac{s_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)}+\cdots+\frac{s_2(x)}{p^2(x)}+\frac{s_1(x)}{p(x)},\quad (5)$$

其中各$s_i(x)$或为$0(x)$，或次数低于$p(x)$的次数。

证明：由§2.6定理1，分子$u(x)$可按$p(x)$的方幂展开：

$$u(x)=s_1(x)p^{k-1}(x)+s_2(x)p^{k-2}(x)+\cdots$$
$$+s_{k-1}(x)p(x)+s_k(x),\quad (6)$$

其中各$s_i(x)$或为$0(x)$，或次数低于$p(x)$。由(6)式可得

$$\frac{u(x)}{p^k(x)}=\frac{s_k(x)}{p^k(x)}+\frac{s_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)}+\cdots+\frac{s_2(x)}{p^2(x)}+\frac{s_1(x)}{p(x)}.$$

下面来证定理2：

将分母$g(x)$分解为数域P上的典型分解式

$$g(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_l^{k_l}(x). \qquad (7)$$

由于$p_1^{k_1}(x)$，$p_2^{k_2}(x)$，…，$p_l^{k_l}(x)$两两互素，用引理1的结果，可将原分式表为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}+\frac{u_2(x)}{p_2^{k_2}(x)}+\cdots+\frac{u_l(x)}{p_l^{k_l}(x)},$$

上式右端各项都是真分式。

利用引理 2 的结果，分式$\frac{u_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,$ $l)$可表为：

$$\frac{u_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}=\frac{s_{k_i}^{(i)}(x)}{p_i^{k_i}(x)}+\frac{s_{k_i-1}^{(i)}(x)}{p_i^{k_i-1}}+\cdots+\frac{s_2^{(i)}(x)}{p_i^2(x)}+\frac{s_1^{(i)}(x)}{p_i(x)}.$$

因而原分式可表为一系列最简分式之和。注

证毕。

真分式的最简分式展开式是否唯一呢？

定理3 真分式表为最简分式之和的展开式，是唯一的。

证明：用反证法。

设真分式$\frac{f(x)}{g(x)}$有两个展开式，且不相同。现在，让第一个展式减第二个展式，合并同分母的分式后，将出现若干最简分式之和等于零分式的等式。假定这些最简分式的分母是不可约多项式$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$的方幂，再设这些方

注 但在实践上看，真分式展为最简分式之和的工作，很难作到，因为分母分解为典型分解式就很困难。

幂的最高次数分别是k_1，k_2，…，k_s，用$p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$来乘上述等式的两端，则除分母是$p_1^{k_1}(x)$的分式$\frac{u(x)}{p_1^{k_1}(x)}$化为$\frac{u(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)}{p_1(x)}$外，其他分式都变成多项式。所剩的这个分式分母与分子的每个因子都互素，所以是一个既约分式。把上面所说的多项式，合并成一个多项式，移到等号另一端，于是一个多项式将和一个分母不是常数的既约分式相等，这是不可能的（因为若既约分式$\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$，其中$h(x)$为多项式，$g(x)$为非零次多项式，则有$f(x)=g(x)h(x)$，即$g(x)\mid f(x)$，与既约性矛盾）。于是，证明了展开式的唯一性。

例1 将分式$\frac{x^5+x-1}{x^7-x^6+4x^4-4x^3+4x-4}$在有理数域上展为最简分式之和。

解：首先，将分母分解为有理数域上的典型分解式：

$$x^7-x^6+4x^4-4x^3+4x-4=(x^3+2)^2(x-1).$$

x^3+2是有理数域上的不可约多项式（可由艾森斯坦定理判定），而原分式是一个真分式，由定理2及定理3，可表为有理数域上的三个最简分式的和，用待定系数法可以求得。

设
$$\frac{x^5+x-1}{(x^3+2)^2(x-1)}=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x^3+2)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+2}+\frac{G}{x-1},$$

其中A，B，C，D，E，F，G为待定常数。

由上式可得

$$x^5+x-1=(Ax^2+Bx+C)(x-1)+(Dx^2+Ex+F)\cdot(x^3+2)(x-1)+G(x^3+2)^2.$$

或 $x^5+x-1=(G+D)x^6+(E-D)x^5+(F-E)x^4+(2D-F+4G+A)x^3+(B+2E-2D-A)x^2+(C-B+2F-2E)x-C-2F+4G$。

对比系数，可得方程组：

$$\begin{cases} G+D=0, \\ E-D=1, \\ F-E=0, \\ 2D-F+4G+A=0, \\ B+2E-2D-A=0, \\ C-B+2F-2E=1, \\ -C-2F+4G=-1. \end{cases}$$

解得 $A=\frac{2}{3}$，$B=-\frac{4}{3}$，$C=-\frac{1}{3}$，$D=-\frac{1}{9}$，$E=\frac{8}{9}$，$F=\frac{8}{9}$，$G=\frac{1}{9}$。

$$故原分式=\frac{\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}{(x^3+2)^2}+\frac{-\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{8}{9}}{x^3+2}+\frac{\frac{1}{9}}{x-1}.$$

例2 将分式$\frac{8}{x^4+4}$在有理数域上展为最简分式之和。

解：首先，将分母写成有理数域上的典型分解式：

$$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

用艾森斯坦定理，可验证这两个因子都是不可约的。

根据定理2和3，原分式可展为两个最简分式的和，用待定系数法求解如下：

设有展开式

$$\frac{8}{x^4+4}=\frac{8}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2},$$

则 $8=(Ax+B)(x^2-2x+2)+(Cx+D)(x^2+2x+2)$

$=(A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2+(2A-2B$

$+2C+2D)x+(2B+2D)$。

比较系数得方程组：

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -2A+B+2C+D=0, \\ 2A-2B+2C+2D=0, \\ 2B+2D=8. \end{cases}$$

解得 $A=1$，$B=2$，$C=-1$ $D=2$。

故 $\dfrac{8}{x^4+4}=\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}-\dfrac{x-2}{x^2-2x+2}$.

习 题 7.3

1. 将下列分式表为多项式与真分式之和：

(1) $\dfrac{2x^4-3x^3+4x^2-5x+6}{x^2-3x+1}$；

(2) $\dfrac{x^3-3x^2-x-1}{3x^2-2x+1}$；

(3) $\dfrac{x^2+x+4}{x^3+2x^2-2x+7}$；

(4) $\dfrac{x^4-2x^3+4x^2-6x+8}{x-1}$；

(5) x^2+2x-3；

(6) $\dfrac{2x^5-5x^3-8x}{x+3}$; (7) $\dfrac{4x^3+x^2}{x+1+i}$.

2. 将下列真分式展为有理数域上最简分式之和：

(1) $\dfrac{x^4+x^3-2x-1}{x^6-4x^3+4}$;

(2) $\dfrac{2x^3+x^2+3x+3}{(x+1)(x^3+2x+2)}$;

(3) $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+5x+1}{(x+1)^2(x^3+2x+2)}$;

(4) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

(5) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

§7.4 复数域上的最简分式

上节讨论的是一般数域上的最简分式，本节和下一节，将着重研究具体数域上的最简分式.首先，来看复数域上的最简分式.

复数域上首项系数为1的不可约多项式只有一种类型，即一次多项式：$x-a$（a为复数）.下面，就分式分母典型分解式的形式，分几种情况讨论.

一、分母无重因式

这时分母形如$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$，其中$a_1, a_2, \cdots, a_k$互不相同.分式形如

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)}(f(x)\text{次数低于}k)。$$

这一类分式只能展为形如$\frac{A_i}{x-a_i}$的最简分式之和。可设

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-a_k},$$

然后用待定系数法求出A_1，A_2，…，A_k。

例1 将分式$\frac{x^2-2}{x^3-3x^2+2x}$展为最简分式之和。

解：分母分解为$x(x-1)(x-2)$。

设$\frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-2}$，

因而 $x^2-2=A_1(x-1)(x-2)+A_2x(x-2)+A_3x(x-1)$，

即 $x^2-2=(A_1+A_2+A_3)x^2-(3A_1+2A_2+A_3)x+2A_1$。

于是得方程组：

$$\begin{cases}A_1+A_2+A_3=1,\\3A_1+2A_2+A_3=0,\\2A_1=-2。\end{cases}$$

解得$A_1=-1$，$A_2=1$，$A_3=1$。

所以原分式$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$。

例2 求级数

$$S_n=\frac{a}{x(x+a)}+\frac{a}{(x+a)(x+2a)}+\cdots$$

$$+\frac{a}{[x+(n-1)a](x+na)}$$

之和。

分析：先将各项展为最简分式之和，再相加。

解：设$\frac{a}{x(x+a)}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x+a}$，即

$$a=A_1(x+a)+B_1x=(A_1+B_1)x+A_1a,$$

解得$A_1=1$，$B_1=-1$。

$$\frac{a}{x(x+a)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}.$$

同法可得 $$\frac{a}{(x+a)(x+2a)}=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a},$$

……

$$\frac{a}{[x+(n-1)a](x+na)}=\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}.$$

故$S_n=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}+\cdots+\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+na}=\frac{na}{x(x+na)}.$$

例3 将分式$\frac{x^2}{x^4-1}$展为复数域上最简分式之和。

解：分母$x^4-1=(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$。

设原分式$=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+i}+\frac{A_4}{x-i}$,

可得$A_1=-\frac{1}{4}$，$A_2=\frac{1}{4}$，$A_3=\frac{i}{4}$，$A_4=-\frac{i}{4}$，故原分式

$$=-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{i}{4(x+i)}-\frac{i}{4(x-i)}.$$

二、分母是$x-a$的方幂

这时，真分式形如$\frac{f(x)}{(x-a)^k}$ $(k\geqslant1)$，展为最简分式之和应有下面的等式：

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}. \qquad (1)$$

其中A_1，A_2，…，A_k为复数。

有两种方法求各A_i。

第一种方法，将$f(x)$按$x-a$的方幂展开，这可由连续的综合除法实现（参见§2.6）.设

$$f(x)=A_1(x-a)^{k-1}+A_2(x-a)^{k-2}+\cdots+A_k,$$

上式两端同除以$(x-a)^k$，即得（1）式。

第二种方法，形式地写出（1）式，然后用待定系数法求出各A_i。

例4 展分式$\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$为最简分式之和。

1	3	−8	0	10
		3	−5	−5
	3	−5	−5	5
		3	−2	
	3	−2	−7	
		3		
	3	1		

解：第一种方法，将分子$f(x)=3x^3-8x^2+10$按$x-1$的方幂展开，得

$$f(x)=3(x-1)^3+(x-1)^2-7(x-1)+5.$$

所以

$$\frac{f(x)}{(x-1)^4}=\frac{5}{(x-1)^4}-\frac{7}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}.$$

第二种方法，设

$$\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}=\frac{A_1}{(x-1)^4}+\frac{A_2}{(x-1)^3}+\frac{A_3}{(x-1)^2}+\frac{A_4}{x-1},$$

上式两端同乘$(x-1)^4$，得

$$\begin{aligned}3x^3-8x^2+10&=A_1+A_2(x-1)+A_3(x-1)^2\\&\quad+A_4(x-1)^3=A_4x^3+(-3A_4+A_3)x^2\\&\quad+(3A_4-2A_3+A_2)x+(-A_4+A_3-A_2+A_1).\end{aligned}$$

对比系数，得方程组：

$$\begin{cases}A_4=3,\\-3A_4+A_3=-8,\\3A_4-2A_3+A_2=0,\\-A_4+A_3-A_2+A_1=10.\end{cases}$$

解得 $A_1=5$，$A_2=-7$，$A_3=1$，$A_4=3$。与第一种方法结果相同。

三、分母含不同的重因式

这时，分母形如$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_l)^{k_l}$，

真分式形如$\dfrac{f(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_l)^{k_l}}$。根据上节定理2和3应展为如下形式：

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_l)^{k_l}}=\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\cdots$$

$$+\frac{A_{k_l}^{(l)}}{(x-a_l)^{k_l}}+\cdots+\frac{A_1^{(l)}}{x-a_l}.$$

其中$A_{k_1}^{(1)}$，…，$A_1^{(1)}$，…，$A_{k_l}^{(l)}$，…$A_1^{(l)}$为复数。然后利用待定系数法求出各个分子。

例5 将分式$\frac{2x^2+1}{x^2(x-1)^2}$展为最简分式之和。

解：设
$$\frac{2x^2+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2},$$

则
$$\begin{aligned}2x^2+1&=A_1x(x-1)^2+A_2(x-1)^2+B_1x^2(x-1)+B_2x^2\\&=(A_1+B_1)x^3+(-2A_1+A_2-B_1+B_2)x^2\\&\quad+(A_1-2A_2)x+A_2.\end{aligned}$$

对比系数，得方程组：
$$\begin{cases}A_1+B_1=0,\\-2A_1+A_2-B_1+B_2=2,\\A_1-2A_2=0,\\A_2=1.\end{cases}$$

解得 $A_1=2$，$A_2=1$，$B_1=-2$，$B_2=3$，

故
$$\frac{2x^2+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}.$$

例6 展分式
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x^4-2x^3+6x^2+2x+7}{x^5+2x^4+2x^3+4x^2+x+2}$$
为复数域上的最简分式之和。

解：首先，将分母$g(x)$分解因式：
$$g(x)=(x+2)(x^2+1)^2=(x+2)(x+i)^2(x-i)^2.$$

设
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1}{(x+i)^2}+\frac{B_2}{x+i}+\frac{C_1}{(x-i)^2}+\frac{C_2}{x-i},$$

由此得 $2x^4-2x^3+6x^2+2x+7=A(x+i)^2(x-i)^2+B_1$
$\cdot(x+2)(x-i)^2+B_2(x+2)(x+i)(x-i)^2+C_1(x+2)(x+i)^2$

$$+C_2(x+2)(x+i)^2(x-i)。\tag{2}$$

令$x=-2$，得　$75=25A$，即$A=3$。

令$x=-i$，得$3-4i=B_1(2-i)(-4)$，$B_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}i$。

令$x=i$，得$3+4i=C_1(2+i)(-4)$，$C_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}i$。

现在将A，B_1，C_1之值代入(2)式，然后分别令$x=0$和-1，可得含B_2及C_2的方程组：

$$\begin{cases} 7=3+(1-\dfrac{1}{2}i)-2B_2i+(1+\dfrac{1}{2}i)+2C_2i, \\ 15=12+(-\dfrac{1}{2}-i)+B_2(-2-2i)+(-\dfrac{1}{2}+i) \\ \quad +C_2(-2+2i) \end{cases}$$

或　$$\begin{cases} -2B_2i+2C_2i=2, \\ B_2(-2-2i)+C_2(-2+2i)=4. \end{cases}$$

解得　$B_2=\dfrac{1}{2}(-1+i)$，$C_2=\dfrac{1}{2}(-1-i)$。

因而，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3}{x+2}-\frac{2-i}{4(x+i)^2}-\frac{1-i}{2(x+i)}-\frac{2+i}{4(x-i)^2}-\frac{1+i}{2(x-i)}.$$

注意：本节第三段代表一般情况，因为其它两种情况可以归为这种情况。

习　题　7.4

1.展下列分式为复数域上的最简分式之和：

(1)$\dfrac{3x+4}{x^2+3x+2}$；(2)$\dfrac{3x}{x^2-x-2}$；

(3) $\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$； (4) $\frac{x^3+x}{(x^2-1)(x^2-2)}$.

2.求和：

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

3.求和：

$$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}.$$

4.展下列分式为复数域上的最简分式之和：

(1) $\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$； (3) $\frac{4x^5-3x^2+2x-4}{x^7}$；

(2) $\frac{x^3-6x^2+4x+8}{(x-3)^4}$； (4) $\frac{x^3-2x^2+3x+5}{(x-1)^5}$.

5.展下列分式为复数域上最简分式之和：

(1) $\frac{x^3-2x^2+1}{x(x-1)^3}$； (4) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$；

(2) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$； (5) $\frac{4x-12}{(x^2-1)^2}$.

(3) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$；

§7.5 实数域上的最简分式

§5.1讲过，实数域上首项系数为1的不可约多项式有两种形式：$x-a$和$x^2+px+q(p^2-4q<0)$。当分母的典型分解式中只有第一类因式时，则和上节讨论的复数域的情形一样。下面讨论分母含有二次不可约因式的情形。

一、分母不含重因式

这时，分式的分母表为若干互不相同的一次及二次不可约因式之积。在这种情况下，分式展为若干分母不同的形如$\frac{A}{x-a}$和$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$的最简分式的和。

注意：分式$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$只有当判别式$p^2-4q<0$时，才是实数域上的最简分式，否则，不是最简分式。如$\frac{3x+4}{x^2+2x+7}$是最简分式，因为$2^2-4\cdot 7=-24<0$；但$\frac{4x+7}{x^2+4x-3}$不是实数域上的最简分式，因为分母是可约的$(4^2-4\cdot(-3)>0)$。

例 1　展$\frac{x}{(x-3)(x^2+2x+5)}$为实数域上最简分式之和。

解：x^2+2x+5是实数域上的不可约因式，这是因为$2^2-4\cdot 5=4-20=-16<0$。

设$\frac{x}{(x-3)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$，即

$$x=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-3)。\qquad (1)$$

令$x=3$，得$3=20A$，$A=\frac{3}{20}$；

(1)式左端x^2系数为0，右端为$A+B=\frac{3}{20}+B$，故$B=-\frac{3}{20}$；

(1)式左端常数项为0，右端为$5A-3C$，即$\frac{3}{4}-3C$，因此

$\frac{3}{4}-3C=0, C=\frac{1}{4}$，

所以 $\dfrac{x}{(x-3)(x^2+2x+5)}=\dfrac{3}{20(x-3)}$

$-\dfrac{3x-5}{20(x^2+2x+5)}$.

例 2 展$\dfrac{2x^2+x+3}{x^4+x^2+1}$为实数域上的最简分式之和。

解：分母$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

这两个因子的判别式$p^2-4q<0$，故都是实数域上的不可约多项式。

设$\dfrac{2x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$,

则$2x^2+x+3=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$.

或$2x^2+x+3=(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+(B+D)$。比较系数，得：

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -A+B+C+D=2, \\ A-B+C+D=1, \\ B+D=3. \end{cases}$$

解得 $A=\dfrac{1}{2}$, $B=1$, $C=-\dfrac{1}{2}$, $D=2$.

因而 $\dfrac{2x^2+x+3}{x^4+x^2+1}=\dfrac{x+2}{2(x^2+x+1)}-\dfrac{x-4}{2(x^2-x+1)}$.

二、分母含有重因式

这时，分母包含一些二次不可约因子的方幂以及一些一次因子的方幂，这是最一般的情形。这种情形仍采用待定系数

法，分式应展成若干形如$\frac{A}{(x-a)^k}$和$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}$的最简分式之和。

例3 展分式$\frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}$为实数域上最简分式之和。

解：x^2+x+1是不可约多项式$(p^2-4q<0)$。

设

$$\frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2},\tag{2}$$

则 $x^3=(Ax+B)(x^2+x+1)+Cx+D$

$$=Ax^3+(A+B)x^2+(A+B+C)x+(B+D).$$

对比系数得方程组：

$$\begin{cases}A=1,\\A+B=0,\\A+B+C=0,\\B+D=0.\end{cases}$$

解得$A=1$，$B=-1$，$C=0$，$D=1$，

故$\frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$.

例4 展分式$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$为实数域上最简分式之和。

解：分母的因式x^2+x+1是实数域上的不可约多项式，因而，原分式应为下列最简分式之和：

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

得出等式

$$2x-1=A(x+1)^2(x^2+x+1)^2+B_1x(x+1)(x^2+x+1)^2+B_2x(x^2+x+1)^2+(C_1x+D_1)(x^2+x+1)x(x+1)^2+(C_2x+D_2)(x+1)^2x. \qquad (3)$$

令 $x=0$，得 $-1=A$；令 $x=-1$，得 $-3=-B_2$，即 $B_2=3$。将A，B_2之值代入(3)后，整理可得

$$x^6+x^5+2x^4+x^3+2x^2+3x=x(x+1)[B_1(x^2+x+1)^2+(C_1x+D_1)(x+1)(x^2+x+1)+(C_2x+D_2)(x+1)].$$

左端分解因式，同时，右端方括号内合并同类项，可得

$$x(x+1)(x^4+2x^2-x+3)=x(x+1)[(B_1+C_1)x^4+(2B_1+2C_1+D_1)x^3+(2C_1+C_2+3B_1+2D_1)x^2+(C_1+C_2+2D_1+D_2+2B_1)x+(D_1+D_2+B_1)].$$

约去$x(x+1)$后，对比系数，成为以下方程组：

$$\begin{cases} B_1+C_1=1, \\ 2B_1+2C_1+D_1=0, \\ 2C_1+C_2+3B_1+2D_1=2, \\ C_1+C_2+2D_1+D_2+2B_1=-1, \\ D_1+D_2+B_1=3. \end{cases}$$

解得$B_1=7$，$C_1=-6$，$D_1=-2$，$C_2=-3$，$D_2=-2$。所以展开式应是

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}.$$

注意：本题也可以由(3)式直接展开，对比系数，得出7

个变量的线性方程组，求解也得这一结果。

习　题　7.5

1.展开下列分式为实数域上的最简分式之和：

(1) $\dfrac{x}{(x-2)(x^2+2x+2)}$;

(2) $\dfrac{2x^3-5x^2+2x-3}{(x^2-3x+2)(x^2-2x+3)}$;

(3) $\dfrac{4x^2+19x+46}{(x^2+1)(x+4)}$;

(4) $\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}$;

(5) $\dfrac{6x^2+x-1}{(x^2+1)(x^2+x-6)}$;

(6) $\dfrac{2x^3+x^2+2x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

2.展下列分式为实数域上最简分式之和：

(1) $\dfrac{x^5+4x^4+11x^3+19x^2+22x+18}{(x^2+x+2)^3}$;

(2) $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}$;

(3) $\dfrac{x^3+3x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

(4) $\dfrac{2x^4+2x^3+5x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)^2}$;

(5) $\dfrac{8}{x(x^2+4)^2}$.

本 章 提 要

1.有理分式域$P(x)$是形如 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 表示式的全体，其中$f(x)$和$g(x)$是数域P上的多项式，且$g(x)\neq 0(x)$.

2.有理分式的运算与性质：

(1) 相等：$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$当且仅当$f(x)\psi(x)=g(x)\phi(x)$.

(2) 加法和减法：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\pm\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\psi(x)\pm\phi(x)g(x)}{g(x)\psi(x)}.$$

(3) 乘法：$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\phi(x)}{g(x)\psi(x)}$.

(4) 除法：$\frac{f(x)}{g(x)}\div\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\psi(x)}{g(x)\phi(x)}$，其中$\phi(x)\neq 0(x)$.

(5) 任意分式可唯一地表为一个多项式与一个真分式之和.

3.最简分式

(1) 数域P上形如 $\frac{f(x)}{p(x)}$ 的真分式，其中$p(x)$是数域P上的不可约多项式，$f(x)$的次数低于$p(x)$的次数，$k\geqslant 1$，称为最简分式.

(2) 数域P上任意真分式皆可唯一地表为数域P上若干最简分式的和.

(3) 复数域上最简分式的形式：$\frac{A}{(x-a)^k}$.其中A，a为复数，

$k \geqslant 1$.

(4) 实数域上最简分式的形式：$\frac{A}{(x-a)^k}$和$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}$.

其中A，B，C，a，p，q为实数，p，q满足$p^2-4q<0$，$k\geqslant 1$，$l\geqslant 1$.

(5) 常用的展成最简分式之和的方法：

① 将分母写成典型分解式；

② 形式地表成若干最简分式的和；

③ 利用待定系数法，求出各分子.

复 习 题 七

1. 化简下列分式：

(1) $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$；

(2) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^2-(x+1)^2}$；

(3) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$.

2. 展下列分式为复数域上的最简分式之和：

(1) $\dfrac{1}{x^n-1}$；

(2) $\dfrac{n!}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$；

(3) $\dfrac{2x+1}{x^2(x+2)^3(x+1)}$；

(4) $\dfrac{-x^4+x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$；

（5）$\dfrac{-x^4+x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$.

3.展下列分式为实数域上最简分式之和

（1）$\dfrac{x^3+2}{(x^2+1)(x-2)^2}$;

（2）$\dfrac{4x^4-16x^3+17x^2-8x+7}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)}$;

（3）$\dfrac{1}{x^2(x^2+x+1)^2}$;

（4）$\dfrac{8x^2-4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$;

（5）$\dfrac{4x^3}{(x^4+x^2+1)^2}$.

第八章　多元多项式

前面讨论的多项式，都是一元多项式。下面，我们探讨n个变量的多项式，即n元多项式，而且着重讨论n元对称多项式。最后，将详述结式的概念和二元高次方程组的解法。

§8.1　一般概念

这一节，将用函数观点引入n元多项式的概念，并证明n元多项式标准形式的唯一性。

一、标准形式

定义1　由变量x_1，x_2，…，x_n和数域P上的数经有限次加、减、乘运算得到的n元函数表达式，称为数域P上的n元多项式。

注意：数域P上的n元多项式作为n元函数，其定义域也认为是数域P。

如　$3(x_1+x_2+x_3)^3+1, x_1^2x_2-(x_1+x_2)(2x_1-1)$，$2x_1-x_2^2+2x_1x_2+25$，$x_2^5$，$-5$，$x_1^4-x_1$　等都是有理数域上的多元多项式，也是任意数域上的多元多项式。而$\sqrt{2}x_1^3-\sqrt{3}x_1x_2+\sqrt{5}x_1x_2-1$，　$\pi x_2+2+3.1x_1x_2-\sqrt{3}x_1^3x_2$等则不是有理数域上的多元多项式，可以看成实

数域或复数域上的多项式。一般地，若$\overline{P}$是包含数域P的数域，那末数域P上的多项式都可看作数域$\overline{P}$上的多项式. 反之则不成立，如上面举的例子就说明这一点。

下列多元函数都不是多项式：

$$\frac{1}{x_1}-\frac{2x_3}{x_1x_2}+4x_1x_2^2,\qquad tgx_1-2tgx_2+1,$$

$$\sqrt{x_1x_2}-x_1+2,\qquad \sin x_1+\sin x_2+\sin x_3,$$

$$2^{x_1}+2^{x_2}-\frac{1}{2},\qquad x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{3}{2}}+4x_1x_2^{-1}+43,$$

$$x_1x_2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+\frac{1}{3}x_1^3x_2^3+\cdots.$$

（读者想一想，为什么？）

形如$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的$n$元函数，其中$k_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）是非负整数（若$k_i=0$，则这个单项式不含$x_i$），$a\in P$，称为数域$P$上的$n$元单项式。$a$称为它的系数。若$a\neq 0$，则$k_1+k_2+\cdots+k_n$称为它的次数。若系数为零，则称为零单项式，否则称为非零单项式。零单项式没有次数。

两个单项式$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$与$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$，若有$k_1=l_1$，$k_2=l_2$，$\cdots$，$k_n=l_n$，则称为同类单项式。零单项式可以认为与任意单项式同类。两同类单项式相加，相当于系数相加。

含n个变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n的n元多项式

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}+\cdots+bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n} \qquad (1)$$

中，若各单项式互不同类，则称为n元多项式的标准形式。组成(1)的各个单项式，称为(1)的项。各非零项次数的最高者，称为这个n元多项式的次数。以下提到的n元多项式，均

指写成标准形式的多项式。

显然，单项式也是多项式，不过它只含有一项。若多项式各项均是零单项式，则称为零多项式。零多项式没有次数。

两个n元多项式f和g，若含有相同的项（不计项的次序及零系数项的不同），则称其相等，记为$f=g$。

和一元多项式一样，多元多项式的相等与恒等也是一致的，为了证明这一点，先证零多项式的唯一性。

首先，零多项式对变量x_1，x_2，…，x_n的所有允许值（即数域P中的数）的函数值都是零，即恒等于零；反之，一个写成标准形式的n元多项式，若恒等于零，必然也是零多项式。这就是下面的引理：

引理1 数域P上的n元多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$如果对任意的$x_i \in P$，$i=1, 2, \cdots, n$，其函数值都是零，那末$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是零多项式，即其标准形式中各项都是零单项式。

证明：对变量个数使用数学归纳法。

(1) 当$n=1$时，由§2.1定理1知结论正确；

(2) 假定对于变量个数是$n-1$的情况已证明，我们来证明结论对于变量个数是n的情况成立。

设$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$是一个$n$元多项式，对变量$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$的一切值，恒有$f\equiv 0$。现将$f$按$x_n$的方幂排项（见下节），即把含有相同的$x_n$方幂的项集中在一起，设$x_n$的最高方幂为$x_n^m$，则$f$可写作

$$f\equiv f_m(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})x_n^m + f_{m-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \cdot x_n^{m-1} + \cdots + f_0(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})。\quad (2)$$

由于对x_1，x_2，…，x_n的任一组值，函数值$f(x_1$，x_2，

$\cdots, x_n)$都是零，所以固定x_1，$x_2\cdots, x_{n-1}$的任一组值c_1, c_2，$\cdots$，c_{n-1}，而让x_n进行变化，便得只含一个变量x_n的一元多项式

$$f(c_1 c_2, \cdots, c_{n-1}, x_i) \equiv f_m(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})x_n^m + f_{m-1}(c_1, c_2\cdots, c_{n-1})x_n^{m-1} + \cdots + f_0(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}).$$

它是恒等于零的一元多项式。由第二章的零多项式唯一性定理知，各系数都应是零，即

$$f_i(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}) = 0, \quad i = m, m-1, \cdots, 0.$$

因为c_1，c_2，$\cdots$，c_{n-1}可以任取，所以

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \equiv 0, \quad i = m, m-1, \cdots, 0.$$

以上这$m+1$个$n-1$元多项式都恒等于零.由归纳假定，它们都是零多项式，即f_m，f_{m-1}，$\cdots$，f_0的系数全是零，因而f的系数也都是零，f为零多项式。

定理 1 两个n元多项式f和g恒等的充要条件是其标准形式相等。

证明：充分性。设

$$f = a_1 x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_m} + \cdots + b_1 x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}, \tag{3}$$

$$g = a_2 x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_m} + \cdots + b_2 x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \tag{4}$$

相等，则$a_1 = a_2$，$\cdots$，$b_1 = b_2$（f和g的标准形式相同），这时，f和g实际上是同一多项式，即$f \equiv g$。

必要性。

假定$f \equiv g$，可以适当补充一些系数为零的项，使两个多项式含有共同的项。因而可以认为两多项式形如（3）、（4），$f-g$应恒等于零.但$f-g \equiv (a_1 - a_2)x_1^{k_1} \cdots + x_n^{k_n} + \cdots + (b_1 - b_2)x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$。由引理 1 知，必有$a_1 - a_2 = 0$，$\cdots$，

$b_1-b_2=0$。

或 $a_1=a_2$，…，$b_1=b_2$。

因而，f和g的标准形式对应系数相等。

证毕。

由本定理，即可推出标准形式的唯一性。

推论 1 任一多项式的标准形式是唯一的。

注意：多项式的标准形式对项的排列次序没有要求，且不计系数为零的项.另外，多项式的非标准形式是不唯一的。

如 $f(x_1, x_2)=(x_1+x_2)^2-x_1^2-x_2^2\equiv 2x_1x_2$

$$\equiv(x_1+2x_2)^2-(x_1+x_2)^2-3x_2^2.$$

例 1 将多项式$f=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)\cdot(x_1+x_3-x_2)(x_2+x_3-x_1)$化为标准形式。

解：$f\equiv[(x_1+x_2)^2-x_3^2][x_3^2-(x_1-x_2)^2]$

$$\equiv 2x_1^2x_2^2+2x_1^2x_3^2+2x_2^2x_3^2-x_1^4-x_2^4-x_3^4.$$

例 2. 证明拉格朗日等式：

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$
$$-(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$$
$$\equiv(a_2x_1-a_1x_2)^2+(a_3x_1-a_1x_3)^2+\cdots+(a_nx_{n-1}-a_{n-1}x_n)^2.$$

分析：等式两端均为n元多项式，但却不是标准形式，将它们分别化为标准形式，即可得证。

证明：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+a_n^2)$恒等于一切可能乘积$a_i^2x_j^2$之和（共$n^2$项），这里$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$。

而$(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$恒等于$a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+\cdots+a_n^2x_n^2$加上所有可能的乘积$2a_ia_jx_ix_j$（共$n+C_n^2$项），

$i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, n$。

这样，原式左端合并之后，$a_i^2x_i^2$形的项被消掉了，剩下的项适当调换次序，得到形如

$$a_i^2x_j^2-2a_ia_jx_ix_j+a_j^2x_i^2 \quad (i<j) \tag{5}$$

的所有项的和。

另一方面，原式右端展开后，也是所有形如(5)的项之和。

例3 证明欧拉等式：

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)^2+(a_2x_1-a_1x_2+a_4x_3-a_3x_4)^2+(a_3x_1-a_4x_2-a_1x_3+a_2x_4)^2+(a_4x_1+a_3x_2-a_2x_3-a_1x_4)^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).$$

证明：上式左端展开后，所有乘积项都互相消掉，只剩下平方项：

$$a_1^2x_1^2+a_2^2x_1^2+a_3^2x_1^2+a_4^2x_1^2+a_1^2x_2^2+a_2^2x_2^2+a_3^2x_2^2+a_4^2x_2^2$$
$$+a_1^2x_3^2+a_2^2x_3^2+a_3^2x_3^2+a_4^2x_3^2+a_1^2x_4^2+a_2^2x_4^2+a_3^2x_4^2+a_4^2x_4^2.$$

右端展开也是以上16项。

二、n元多项式环

标准形式下n元多项式的加法、减法、乘法法则，与一元多项式的对应法则十分类似，也与大家熟知的恒等变形完全相同，不再详述。

显然．数域P上n元多项式的和、差、积仍是同一数域上的n元多项式，并且满足通常的算律。

定义2 数域P上n元多项式的全体，称为数域P上n元多项式环，记为$P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$。

当$n=1$时，n元多项式环就是一元多项式环。一元多项式环的许多重要概念和性质，都可以推广到n元多项式环中来（顺便提出，带余除法却不能推广到多元多项式中）。

习 题 8.1

1.证明：

$$(x_1+x_2+x_3)^3-(x_1+x_2-x_3)^3-(x_1-x_2+x_3)^3-(-x_1+x_2+x_3)^3=24x_1x_2x_3.$$

2.证明：

$$[a(x_1+x_2)+b(x_1-x_2)]^2-[a(x_1-x_2)+b(x_1+x_2)]^2=(4a^2-4b^2)x_1x_2.$$

3.证明：

$$(x_1+x_2)^5-x_1^5-x_2^5=5x_1x_2(x_1+x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

4.证明：

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3).$$

5.证明：

$$(x_1+x_2+x_3)^3-x_1^3-x_2^3-x_3^3=3(x_1+x_2)(x_1+x_3)\cdot(x_2+x_3).$$

6.化 $(x_1-x_2)^2(x_1+2x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$为标准形式。

7.证明：

$$(x_1+x_2)^3+(x_1+x_3)^3+(x_1+x_4)^3+(x_2+x_3)^3+(x_2+x_4)^3+(x_3+x_4)^3=3(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).$$

3. 证明本节推论1（利用定理1和恒等关系的传递性）。

§8.2 多元多项式的排项法

对于一元多项式，项的排列法常用的不外两种：降幂排列和升幂排列。由于不同项的次数也不相同，故可用次数来区分项。

但多元多项式就不同了，因为多元多项式写成标准形式后，不同项可以次数相同，如

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2 + 2x_1 - 1$$

的二次项就有三个不同类的项，单纯用次数难以区分开它们。因此，对于多元多项式的情形，项的排列比较复杂，常用的有次数排项法、按某一变量的方幂排项法及字典排项法。

一、次数排项法

定义1 若n元多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$各项的次数相同，例如都是k次（$k \geqslant 0$），则称f为k次齐次多项式。如

$$f = x^3 + 3x_1^2x_2 + 4x_2^2x_3 + 2x_3^2x_1 - 7x_3^3$$

就是一个三元三次齐次多项式。

引理1 齐次多项式的乘积，仍是齐次多项式，其次数等于这两个多项式次数之和。

证明是明显的，留给读者去完成。

一般的n元多项式，可以将它的项按次数分类，使每一类中的各项次数相同，整个多项式就表成若干齐次多项式的和。如

$$f = 12 + 3x_2x_3^2 + 3x_1 - 2x_1^2x_2 + 2x_2 - x_3 + 2x_1^3,$$

可写成

$$f=f_3+f_1+f_0,$$

其中$f_3=3x_2x_3^2+2x_1^3-2x_1^2x_2$，$f_1=2x_2-x_3+3x_1$，$f_0=12$分别为三次、一次及零次齐次多项式。

把多项式f按项的次数写成若干次数递减（或递增）的齐次多项式的和，叫做多项式的次数排项法。一个m次多元多项式f，可表为

$$f=f_m+f_{m-1}+\cdots+f_1+f_0.$$

其中各f_i是i次齐次多项式($i=m$，$m-1$，…，1，0)。

次数排项法允许同次数的不同项交换，因而不能保证项排列方法的绝对唯一性。

二、按某一变量的方幂排项法

这种排项法，是把注意力放在某一个变量上，不妨设这个变量是x_1。把含x_1相同方幂的项集中在一起，分为若干类，每类提出公因子x_1的方幂。设x_1的最高方幂是k，那末整个多项式可写成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f_k(x_2,\cdots,x_n)x_1^k+f_{k-1}(x_2,\cdots,x_n)x_1^{k-1}+\cdots+f_0(x_2,\cdots,x_n). \tag{1}$$

如$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2-x_1^3x_3+x_1^2x_3^2-7x_1^3+25+2x_2^2-x_1^2$

按x_1的方幂排项是

$$f=(x_2-x_3-7)x_1^3+(x_3^2-1)x_1^2+(2x_2^2+25);$$

按x_2的方幂排项是

$$f=2x_2^2+x_1^3x_2+(x_1^2x_3^2-x_1^3x_3-x_1^2-7x_1^3+25);$$

按x_3的方幂排项是

$$f = x_1^2x_3^2 - x_1^3x_3 + (x_1^3x_2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 7x_1^3 + 25).$$

由于含x_1相同方幂的项，在按x_1方幂排项时，不能区分先后次序，因而这种方法排列项的方式也不是唯一的。

三、字典排项法

我们查过英语字典，英语的单词成千上万，但在字典里任何两个单词都有先后次序。如*blackboard*（黑板）和*blanket*（地毯）这两个单词谁排在前头呢？先看它们的第一个字母，刚好相同，都是*b*，再看第二个字母，又同为*l*，第三字母也一样，是*a*，第四个字母就不同了，一个是*c*，一个是*n*，在字母表中*c*先于*n*，所以就把*blackboard*排在*blanket*的前面。

利用这个道理，产生了多元多项式的一种排项法——字典排项法。

n元多项式的任一项可以写成$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的形式，它唯一地对应着一个非负整数数组：$(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_n)$。因而只要规定好数组之间的顺序，就等于规定了项的顺序。

现在，我们这样规定数组的顺序：

假定整数数组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$和$(l_1, l_2, \cdots, l_n)$是两个不同的数组，即至少有一对数k_i和l_i不相等。从k_1与l_1向后一对对进行比较，第一对不等的数中，大数所在的数组称为“先于”另一个数组，详细地说，即是：

若$k_1>l_1$，或若$k_1=l_1$，但$k_2>l_2$，或若$k_1=l_1$，$k_2=l_2$，但$k_3>l_3$，一般地，若$k_1=l_1$，…，$k_{i-1}=l_{i-1}$，但$k_i>l_i$，则称数组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$先于数组$(l_1, l_2,$

…，l_n），或称数组（l_1，l_2，…，l_n）后于数组（$k_1, k_2, \cdots,$ k_n）。

如（2，3，1，4，5）与（2，3，2，0，1）中，2＝2，3＝3，1＜2，故第二组先于第一组。

这里顺便指出一个有趣的方法，如果把两个数组中的逗号去掉，就成了两个五位数，它们中大的数对应的数组就先于另一个。如上例中，一个是23145，另一个是23201，后者较大，因而（2，3，2，0，1）就先于另一个数组。

以上对于n元数组规定的顺序，显然有下面的特点：

1.任意两个不同的数组，有唯一确定的先后次序；

2.这种先后次序满足传递性，即若甲数组先于乙数组，乙数组先于丙数组，那末甲数组先于丙数组。

前面提到，n元多项式的项，唯一确定一个n元指数组，一个n元非负整数数组，也唯一确定一个n元单项式（系数不定）。因此，任何n元多项式的所有各项，必能依照其对应的指数数组建立项的先后次序，同一多项式中任何两个不同类的项，有唯一确定的先后次序。这种排项的方法，称为字典排项法。字典排项法，使多项式的排项有唯一性，这是它的一大优点。

本节“二”中所举的例子，用字典排项法写出，就是

$$f = x_1^3 x_2 - x_1^3 x_3 - 7x_1^3 + x_1^2 x_3^2 - x_1^2 + 2x_2^2 + 25.$$

按字典排项法排出的第一个非零项，称为首项。首项不一定是次数最高的项，如$f = x_1^2 + 3x_1 x_2^7 + x_2^3$是用字典排项法排出的多项式，但首项次数却不如其他各项次数高，只是对于一元多项式来说，字典排项法与降幂排项法才是一致的，这时，首项也同时是次数最高的项。

定理1（首项定理）设$f(x_1, \cdots, x_n)$和$g(x_1, \cdots, x_n)$都不是零多项式，则$f\cdot g$的首项等于f的首项与g的首项之积。

分析：写出f和g的首项及一个其它项，比较乘积中四种类型的项，然后证明首项之积先于其它各项。

证明：已知字典排项法排出的两个多项式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}+\cdots+bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}+\cdots, \quad (2)$$

$$g(x_1,\cdots,x_n)=cx_1^{t_1}\cdots x_n^{t_n}+\cdots+dx_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n}+\cdots. \quad (3)$$

假定$ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$和$cx_1^{t_1}\cdots x_n^{t_n}$分别是$f$和$g$的首项，$bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$和$dx_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n}$分别是$f$和$g$的其它任一项，则

$$f\cdot g=acx_1^{k_1+t_1}\cdots x_n^{k_n+t_n}+\cdots+bcx_1^{l_1+t_1}\cdots x_n^{l_n+t_n}+\cdots$$
$$+adx_1^{k_1+r_1}\cdots x_n^{k_n+r_n}+\cdots+bdx_1^{l_1+r_1}\cdots x_n^{l_n+r_n}+\cdots.$$

在$f\cdot g$中的项，可分为四种类型：

(1) 两首项之积，即$acx_1^{k_1+t_1}\cdots x_n^{k_n+t_n}$；

(2) f的一般项与g首项之积，如$bcx_1^{l_1+t_1}\cdots x_n^{l_n+t_n}$，

(3) g的一般项与f首项之积，如$adx_1^{k_1+r_1}\cdots x_n^{k_n+r_n}$；

(4) 两个一般项之积，如$bdx_1^{l_1+r_1}\cdots x_n^{l_n+r_n}$。

下面证明$acx_1^{k_1+t_1}\cdots x_n^{k_n+t_n}$是$f\cdot g$的首项，只要证明$(k_1+t_1, \cdots, k_n+t_n)$先于$(l_1+t_1, \cdots, l_n+t_n)$、$(k_1+r_1,\cdots,k_n+r_n)$及$(l_1+r_1,\cdots,l_n+r_n)$即可。

事实上，由于$(k_1\cdots, k_n)$先于$(l_1\cdots, l_n)$，故存在$i\leq n$，使得$k_1=l_1\cdots$，$k_{i-1}=l_{i-1}$，$k_i>l_i$，因而k_1+t_1

$=l_1+t_1$, …, $k_{i-1}+t_{i-1}=l_{i-1}+t_{i-1}$, $k_i+t_i>l_i+t_i$，故$(k_1+t_1, \cdots, k_n+t_n)$先于$(l_1+t_1, \cdots, l_n+t_n)$。同法可证$(k_1+t_1, \cdots, k_n+t_n)$先于$(k_1+r_1, \cdots, k_n+r_n)$。

最后，由于$(t_1, \cdots, t_n)$先于$(r_1, \cdots, r_n)$，故存在$j\leqslant n$，使$t_1=r_1$，…，$t_{j-1}=r_{j-1}$，$t_j>r_j$。不妨设$j\geqslant i$，故$k_1+t_1=l_1+r_1$，…，$k_{i-1}+t_{i-1}=l_{i-1}+r_{i-1}$，$k_i+t_i\geqslant k_i+r_i>l_i+r_i$，因而$(k_1+t_1, \cdots, k_n+t_n)$先于$(l_1+r_1, \cdots, l_n+r_n)$。

证毕。

推论1 若$f_1, \cdots, f_m$都是非零多项式，则$f_1\cdot f_2\cdots f_m$的首项等于每个f_i的首项之积。

请读者自证。

推论2 若f和g为非零多项式，则$f\cdot g$为非零多项式。

证明： 由于f和g都是非零多项式，其首项都是非零单项式，由首项定理，$f\cdot g$的首项是f和g首项之积。它先于其它项，故不会被消去，$f\cdot g$至少有一个非零项，当然也就不是零多项式了。

推论3 多元多项式的乘法满足消去律，即由$f\cdot g=f\cdot h$，$f\neq 0$，可得$g=h$。

证明： 因为$f\circ g=f\cdot h$，$f(g-h)$为零多项式，f是非零多项式，如果$g\neq h$。那末$g-h$就是非零多项式，由推论2，$f(g-h)$是非零多项式，矛盾.故$g=h$，消去律成立。

习 题 8.2

1.将下列多项式按三种排项法分别排项：

(1) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$；

(2) $x_2^2+x_1^2x_3+3x_1x_2x_3-x_3^2+x_1x_3^4$;

(3) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

(4) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$;

(5) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\cdots(x_1-x_n)^2$.

2.证明本节推论1。

3.两多元多项式按字典排项法排项的首项之和是不是两多项式之和的首项？举例说明。

4.试证：两个齐次多项式之积，也是齐次多项式，且次数为两多项式次数之和。

5.试证明n元数组字典排项法规定的次序关系满足传递性。即若$(k_1, \cdots, k_n)$先于$(l_1,\cdots, l_n)$，$(l_1\cdots, l_n)$先于$(t_1, \cdots, t_n)$，则$(k_1, \cdots, k_n)$先于$(t_1, \cdots, t_n)$。

6.三种排项法对一元多项式是一致的，与降幂排列相同。试加以分析。

7.证明：不存在多项式$f(x_1,x_2, x_3)$，满足$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=f(x_1, x_2, x_3)(x_1+x_2+x_3)$。

8.证明：不存在多项式$f(x_1, x_2, x_3)$，满足$x_1^4x_2^2x_3^2+2x_1^3-3x_2^3+1=f(x_1,x_2,x_3)(x_1^2-x_2^2+2x_1-x_2+3)$。

§8.3 对称多项式

这节介绍对称多项式的概念和基本定理以及用初等对称多项式表示一般对称多项式的方法。

一、对称多项式的概念

先看几个例子。

例1 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_1^2x_3$
$+x_2^2x_1+x_3^2x_2$。

x_1,x_2,x_3中任意两个变量互换时，易见$f(x_1,x_2,x_3)$都不变。

例2 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3$。

将x_1和x_2互换时，得

$f(x_2, x_1, x_3)=x_1x_2-x_2x_3+x_1x_3\neq f(x_1,x_2, x_3)$。

例3 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$。

若将x_1换为x_2，x_2换为x_3，x_3换为x_1，则多项式不变。但若把原多项式x_2与x_1互换，x_3不动，则

$f(x_2, x_1, x_3)=x_2^2x_1+x_1^2x_3+x_3^2x_2\neq f(x_1,x_2,x_3)$。

定义1 若数域P上的n元多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$任意交换两个变量时均保持不变，则称f为数域P上的n元对称多项式。

上面的例1是三元对称多项式，但例2和例3都不是对称多项式。

例4 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$。

f表达式中不含x_4，故它不是四元对称多项式，但将其看作三元多项式时，却是x_1，x_2，x_3的对称多项式。

例5
$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ \quad\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2x_3\cdots x_n.\end{cases}\qquad(1)$$

其中每个$\sigma_k(k=1, 2, \cdots,n)$是所有可能的$k$个不同的$x_i$的乘积之和，是$n$元$k$次齐次多项式。显然，$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\cdots$，

σ_n都是x_1，…，x_n的对称多项式。这n个对称多项式称为初等对称多项式。

二、对称多项式的基本定理

初等对称多项式在对称多项式的理论中起着基本的作用。下面的主要任务就是证明任意n元对称多项式都可由n元初等对称多项式经加、减、乘运算得到，为此，先作一些准备。

引理1 任一对称多项式$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$的首项$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$满足指数不增性：

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_n. \tag{2}$$

证明：用反证法。

假定(2)不成立，必有某$k_i < k_{i+1}$。由于$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是对称的，故$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在包含项$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_i^{k_i}x_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots x_n^{k_n}$的同时，也包含交换$x_i$与$x_{i+1}$后所得的项$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}\cdots x_n^{k_n}$。这一项与首项比较，有$k_1 = k_1$，…，$k_{i-1} = k_{i-1}$，$k_{i+1} > k_i$，显然先于首项。这与首项定义矛盾，故得证。

引理2 对称多项式的多项式，还是对称多项式。

注意：对称多项式的多项式，是指把某些对称多项式当作另一多元多项式（其元数与对称多项式相同）的变量，得到的复合多项式，即某些对称多项式经有限次加、减、乘运算复合而成的表达式。如$f_1 = x_1 + x_2$，$f_2 = x_1x_2$，$f_3 = 1$，$\phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2y_3$。那末，$f_1$，$f_2$，$f_3$的多项式$\phi(f_1, f_2, f_3) = f_1^2 + 2f_1f_2 - f_2f_3 = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)x_1x_2 - x_1x_2 = 2x_1^2x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

证明：设f_1，f_2，…，f_m是x_1，…x_n，的对称多项式，$\phi(y_1, y_2, \cdots, y_m)$是一个$m$元多项式（$m$为$f_i$的个数），我们来证$\phi(f_1, f_2, \cdots, f_m)$是$x_1$，…，$x_n$的对称多项式。

事实上，将任意两个变量x_i和x_j作交换时，由于f_1，…，f_m均为对称多项式，f_1，…，f_m都不发生变化，自然，$\phi(f_1, \cdots, f_m)$也不会发生变化，因而$\phi(f_1, \cdots, f_m)$是x_1，…，x_n的对称多项式。

例6　证明：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=2(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+3(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)^4-12x_1x_2\cdots x_n+7$是对称多项式。

证明：$\phi(y_1, y_2, y_3)=2y_1^2+3y_2^4-12y_3+7$是三元多项式。

$f(x_1x_2, \cdots, x_n)=\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n)$是对称多项式的多项式，由引理2知$f$是对称多项式。

推论1　初等对称多项式的多项式也是对称多项式。

这是引理2的特殊情况，自然不须证明。下面，我们证明推论1的逆定理也正确。

定理1　（对称多项式基本定理）数域P上的每个对称多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都可以表为σ_1，σ_2，…，σ_n的多项式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\phi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

分析：　根据f的首项，作出$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$的一个单项式，用$f$减之，由差再作$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$的单项式，直至得出差是零多项式为止，$f$就是上述所有单项式的和。

证明：　设$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$按字典排项法的首项为

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}. \quad (3)$$

由引理1，$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n$。

作对称多项式的单项式

$$\phi_1 = a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma^{k_n}, \quad (4)$$

则（4）展开后的首项必为（3）。

事实上，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$的首项依次为$x_1$，$x_1x_2, \cdots$，$x_1x_2\cdots x_n$，由首项定理推论1(§8.2)，(4)的首项是各因子首项的乘积，即

$ax_1^{k_1-k_2} \cdot (x_1x_2)^{k_2-k_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{k_n} = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$，与(3)相同。

作差$f_1 = f - \phi_1$(f_1显然也是对称的)，按字典排项法找出f_1的首项，它必然后于f的首项(3)。对f_1重复原来对f的工作，又可构造出一个初等对称多项式的单项式，设为ϕ_2，其首项与f_1的首项相同。再作差$f_2 = f_1 - \phi_2$，f_2的首项自然又后于f_1的首项。这样一直作下去，得出一系列多项式：

$$f, f_1 = f - \phi_1, f_2 = f_1 - \phi_2, \cdots \quad (5)$$

其首项一个比一个更"后"，所以不会出现循环。每个f_i的首项$bx_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}$都后于$f$的首项（3）且满足$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n \geqslant 0$。但是，满足这种要求的项显然只能有有限多个（不会超过$(k_1+1)^n$个），因而序列(5)不可能是无限的，必然出现某f_k=零多项式。

这样一来，我们得到

$$f = \phi_1 + f_1 = \phi_1 + \phi_2 + f_2 = \cdots = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k.$$

其中ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_k都是初等对称多项式的单项式，f表成了初等对称多项式的单项式之和，即初等对称多项式的多项式。

此外，ϕ的系数与f的系数显然属同一数域。

注意：对称多项式表为初等对称多项式的表达式是唯一的。这一点暂时不予证明，只请读者了解这个事实。

三、例题

例7 表三元多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$$

为σ_1，σ_2，σ_3的多项式。

解：可用两种方法。

方法1 （利用基本定理证明过程提出的方法）：

（1） 将f按字典排项法排出首项x_1^3；

（2） 由f的首项决定ϕ_1：

$$\phi_1=\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^3=(x_1+x_2+x_3)^3;$$

（3） 作差$f_1=f-\phi_1=x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_1+x_2+x_3)^3$

$$=-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)-6x_1x_2x_3.$$

重复上面的三步，f_1的首项为$-3x_1^2x_2$，那末

$$\phi_2=-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

$$=-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2)-9x_1x_2x_3.$$

而$f_2=f_1-\phi_2=3x_1x_2x_3$，它只有一项，易见，$f_2=3\sigma_3$。因而

$$f=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

方法2 （待定系数法）：

分析： 假定f已表为$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$的多项式：$f=\phi+\phi_2+\cdots+\phi_k$。由定理1的证明过程知道，$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_k$完全决定于$f,f_1,\cdots,f_{k-1}$的首项，这些$f_i$（包括$f$）的首项具有以下特点：

（1） f_i的首项后于$f,f_1,\cdots,f_{i-1}$的首项；特别，所有f_i的首项不先于f的首项x_1^3。

（2） f_i的首项满足指数不增性。即x_1的指数最大，x_2的指数次之，…，x_n的指数最小。

（3） 每个f_i的首项次数为3（由于f为三次齐式，故各f_i也都是3次齐式）。

写出满足上述三条件的一切可能的项，这只能是ax_1^3，$bx_1^2x_2$和$cx_1x_2x_3$形的项（其中a,b,c为待定常数），对应的ϕ_1,ϕ_2和ϕ_3分别为下式：$a\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=a\sigma_1^3$，

$b\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=b\sigma_1\sigma_2$，$c\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=c\sigma_3$。

因而f可以表为

$$f=a\sigma_1{}^3+b\sigma_1\sigma_2+c\sigma_3. \qquad (6)$$

下面用待定系数法求出a,b,c的数值。

为此，可取一些特殊的自变量x_i的值。

下面开始解题：

取$x_1=1,x_2=x_3=0$，则$f=1,\sigma_1=1,\sigma_2=\sigma_3=0$。从(6)式得$a=1$。

取$x_1=x_2=1,x_3=0$，得$\sigma_1=2$，$\sigma_2=1,\sigma_3=0$，$f=2$，从(6)式得$2=2^3+b\cdot2\cdot1+c\cdot0,b=-3$。

取$x_1=x_2=x_3=1$，得$\sigma_1=3,\sigma_2=3,\sigma_3=1,f=3$。故有$3=3^3-3\cdot3\cdot3+c\cdot1,c=3$。

将a,b,c之值代入(6)式，得

$$f=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

两种方法的结果是相同的。

注意： 待定系数法适用于齐次对称多项式，对于非齐次对称多项式，应先用次数排项法化为若干齐次对称多项式之和，然后，将这些齐次对称多项式分别表为初等对称多项式的多项式，最后相加。

例8 表$n(n\geqslant 4)$元多项式

$$f=\Sigma x_1^2x_2^2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+\cdots+x_{n-1}^2x_n^2$$

为初等对称多项式的多项式。

注意：为减少书写上的麻烦，引用记号“Σ”。如$\Sigma x_1^2x_2^2$表示一切形如$x_i^2x_j^2(i<j)$的项之和，或者说是包括$x_1^2x_2^2$的项数最少的对称多项式。

分析：用待定系数法。

进行与上例相同的分析，可知$f,f_1,\cdots,f_{k-1}$的首项应满足下述条件：

(1) 按字典排项法不先于$x_1^2x_2^2$；

(2) 满足指数不增性；

(3) 次数$=4$。

这样的项只能是$ax_1^2x_2^2,bx_1^2x_2x_3,cx_1x_2x_3x_4$，其中$a,b,c$为待定常数，相应的初等对称多项式的单项式为

$$a\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}=a\sigma_2^2,\quad b\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=b\sigma_1\sigma_3,$$

$$c\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}=c\sigma_4.$$

因而，把f展为初等对称多项式的多项式时，必有下式：

$$f=a\sigma_2^2+b\sigma_1\sigma_3+c\sigma_4. \tag{7}$$

解： 取$x_1=x_2=1,x_3=\cdots=x_n=0$，这时$f=1,\sigma_1=2,\sigma_2=1,\sigma_3=\cdots=\sigma_n=0$，由(7)式，得等式$1=a\cdot 1^2$，所以$a=1$。

取$x_1=x_2=x_3=1,x_4=\cdots=x_n=0$,这时，$f=3,\sigma_1=3$
$\sigma_2=3,\sigma_3=1,\sigma_4=\cdots=\sigma_n=0$。由(7)式可得等式$3=9+3b$，所以$b=-2$。

取$x_1=x_2=x_3=x_4=1,x_5=\cdots=x_n=0$,这时，$f=6$，$\sigma_1=4,\sigma_2=6,\sigma_3=4,\sigma_4=1$。故有$6=36-2\cdot4\cdot4+c\cdot1$,所以$c=2$。

将a,b,c之值代入(7)时，得等式

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

例9 试将$n(n\geqslant3)$元对称多项式

$$f=\Sigma x_1^2x_2+2\Sigma x_1^2$$

表为初等对称多项式的多项式。

分析：f是两个齐次多项式$f_1=\Sigma x_1^2x_2$和$f_2=2\Sigma x_1^2$的和，只须把f_1和f_2分别化为初等对称多项式的多项式，然后相加。

f_1的首项为$x_1^2x_2$,利用以上例题的分析方法，可知f_1应形如

$$f_1=a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3; \tag{8}$$

同法可知，f_2应形如

$$f_2=c\sigma_1^2+d\sigma_2. \tag{9}$$

解：令$x_1=1,x_2=\cdots=x_n=0$,得$\sigma_1=1,f_2=2,\sigma_2=0$，故有$2=c\cdot1^2$,即$c=2$;

令$x_1=x_2=1,x_3=\cdots=x_n=0$,得$f_1=2,f_2=4,\sigma_1=2$，$\sigma_2=1,\sigma_3=0$。由(8)和(9)式，

$2=a\cdot2\cdot1$，$a=1$;

$4=2\cdot2^2+d$，$d=-4$;

令$x_1=x_2=x_3=1,x_4=\cdots=x_n=0$,得$f_1=6$，$\sigma_1=3$，

$\sigma_2=3,\sigma_3=1$，$6=3\cdot 3+b$，$b=-3$。

所以 $f_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$，$f_2=2\sigma_1{}^2-4\sigma_2$。

$$f=f_1+f_2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3+2\sigma_1^2-4\sigma_2.$$

习 题 8.3

1.将下列三元对称多项式表为初等对称多项式的多项式：

(1) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$；

(2) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$；

(3) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$；

(4) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$。

2.将下列四元对称多项式表为初等对称多项式的多项式：

(1) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)\cdot(x_3+x_4)$；

(2) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$；

(3) $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$。

3.将下列n元对称多项式表为初等对称多项式的多项式：

(1) Σx_1^2；

(2) Σx_1^3；

(3) $\Sigma x_1^2x_2x_3$；

(4) $\Sigma x_1^3x_2$；

(5) $\Sigma x_1^2x_2^2x_3$；

(6) $\Sigma x_1^2x_2^2x_3x_4$；

(7) Σx_1^5。

§ 8.4　在一元多项式上的应用

设有复数域上的多项式

$$f(x)=x^{n}+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n. \tag{1}$$

根据代数基本定理（见 § 5.1），$f(x)$有n个复根。设这些复根是x_1，x_2，…，x_n。根据韦达定理（§ 5.2），$f(x)$的根与系数之间有如下的关系式：

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1, \\ x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^{n}a_n. \end{cases} \tag{2}$$

(2)的左端正好是x_1，x_2，…，x_n的初等对称多项式。因而(2)式即可写成

$$\sigma_1=-a_1,\quad \sigma_2=a_2,\quad \cdots,\quad \sigma_n=(-1)^{n}a_n. \tag{3}$$

从而根据对称多项式基本定理（见上节），x_1，x_1，…，x_n的任一对称多项式都可表为$f(x)$的系数a_1，a_2，…，a_n的多项式。

例 1　求三次多项式

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \tag{4}$$

三个根的立方和。

解：设x_1，x_2，x_3为(4)的三个根，那末由上节例 7 知：

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=-a_1^3+3a_1a_2$$

$-3a_3$。

例 2 求n次多项式(1)的所有根两两乘积平方的和$\sum x_1^2x_2^2$。

解：由上节例 8

$$\sum x_1^2x_2^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4.$$

又由(3)式，$\sigma_1 = -a_1$，$\sigma_2 = a_2$，$\sigma_3 = -a_3$，$\sigma_4 = a_4$。所以

$$\sum x_1^2x_2^2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4.$$

在一元多项式$f(x)$根的对称多项式中，有一类对称多项式特别重要，那就是所有根k次幂的和，即

$$s_k = \sum x_1^k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k.\ (k=1,2,\cdots) \tag{5}$$

s_k称为x_1，x_2，…，x_n的k次方幂和。

当$k=1$时，显然$s_1 = \sigma_1 = -a_1$；当$k=2$时，$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a_1^2 - 2a_2$；当$k=3$时，由上节知$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3$。

一般地，s_k与$f(x)$的系数之间有如下关系：

定理 1 (1) 当$k \leqslant n$时，有等式

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \cdots + a_{k-1}s_1 + ka_k = 0. \tag{6}$$

(2) 当$k > n$时，有等式

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \cdots + a_ns_{k-n} = 0. \tag{7}$$

(以上两个等式称为牛顿公式)

证明： (1) 证(6)式。

构造多项式

$$f_i(x) = x^{n-1} + a_{i1}x^{n-2} + a_{i2}x^{n-3} + \cdots + a_{i,n-1}, \tag{8}$$

使其根是原多项式$f(x)$根中除去x_i后的$n-1$个数：x_1，x_2，

$\cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$. 令$i=1, 2, \cdots, n$，便得到$n$个多项式：$f_1(x)$，$f_2(x)$，……，$f_n(x)$。

由于

$$f_i(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}=\frac{f(x)}{x-x_i}.$$

作综合除法，可得$f(x)$除以$x-x_i$的商。

$$\begin{array}{c|lllll}
 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_n \\
x_i & & x_i & x_i^2+a_1x_i & \cdots & x_i^n+a_1x_i^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_i \\
\hline
 & 1 & x+a_1 & x_i^2+a_1x_i+a_2\cdots & & f(x_i)
\end{array}$$

（余数$f(x_i)=0$，这是因为x_i是$f(x)$的根）

所以

$$f_i(x)=x^{n-1}+(x_i+a_1)x^{n-2}+(x_i^2+a_1x_i+a_2)x^{n-3}$$

$$+\cdots+(x_i^{n-1}+a_1x_i^{n-2}+\cdots+a_{n-1}). \tag{9}$$

对比(8)、(9)式的系数，可求得$f_i(x)$与$f(x)$系数之间的关系式：

$$a_{i1}=x_i+a_1,$$

$$a_{i2}=x_i^2+a_1x_i+a_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{i,n-1}=x_i^{n-1}+a_1x_i^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

或概括为下式

$$a_{i,k-1}=x_i^{k-1}+a_1x_i^{k-2}+\cdots+a_{k-1}, (k=2,3,\cdots,n) \tag{10}$$

用x_i乘(10)式，得

$$x_ia_{i,k-1}=x_i^k+a_1x_i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x_i. \tag{11}$$

现在让(11)式对i求和，得等式

$$x_1a_{1,k-1}+x_2a_{2,k-1}+\cdots x_na_{n,k-1}$$
$$=s_k+a_1s_{k-1}+\cdots+a_{k-1}s_1. \qquad (12)$$

用$(-1)^{k-1}$乘(12)式,得

$$x_1(-1)^{k-1}a_{1,k-1}+x_2(-1)^{k-1}a_{2,k-1}+\cdots+x_n\cdot(-1)^{k-1}a_{n,k-1}=(-1)^{k-1}(s_k+a_1s_{k-1}+\cdots+a_{k-1}s_1). \qquad (13)$$

由韦达定理，$(-1)^{k-1}a_{1,k-1}$是多项式$f_1(x)$根（即x_2，x_3，…，x_n）中任意$k-1$个数乘积的和。而$x_1(-1)^{k-1}a_{1,k-1}$是x_1，x_2，…，x_n中包含x_1的任意k个数乘积的和。

同理，$x_2(-1)^{k-1}a_{2,k-1}$是x_1，x_2，…，x_n中包含x_2的任意k个数乘积之和，…，$x_n(-1)^{k-1}a_{n,k-1}$是x_1，x_2，…，x_n中包含x_n的任意k个数乘积之和。(13)式左端是x_1，x_2，…x_n中任意k个数乘积之和的k倍（因每个乘积都刚好出现k次），即等于$k(-1)^ka_k$。因而(13)化为

$$k(-1)^ka_k=(-1)^{k-1}(s_k+a_1s_{k-1}+\cdots+a_{k-1}s_1);$$

$$s_k+a_1s_{k-1}+\cdots+a_{k-1}s_1+ka_k=0.$$

(2) 证(7)式。

由于$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是$f(x)$的根，故有等式

$$x_i^n+a_1x_i^{n-1}+a_2x_i^{n-2}+\cdots+a_n=0. \qquad (14)$$

(14)式两端同乘x_i^{k-n}，得

$$x_i^k+a_1x_i^{k-1}+a_2x_i^{k-2}+\cdots+a_nx_i^{k-n}=0. \qquad (15)$$

(15)式对$i=1,2,\cdots,n$都成立，因而有等式：

$$\begin{cases} x_1^k + a_1 x_1^{k-1} + a_2 x_1^{k-2} + \cdots + a_n x_1^{k-n} = 0, \\ x_2^k + a_1 x_2^{k-1} + a_2 x_2^{k-2} + \cdots + a_n x_2^{k-n} = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n^k + a_1 x_n^{k-1} + a_2 x_n^{k-2} + \cdots + a_n x_n^{k-n} = 0, \end{cases}$$

以上等式相加，得

$$s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \cdots + a_n s_{k-n} = 0.$$

证毕。

利用(6)、(7)，可逐步递推出各s_i来。如由(6)式，可得$s_2 = -2a_2 - a_1 s_1$，由s_1和s_2又可得$s_3 = -a_1 s_2 - a_2 s_1 - 3a_3$等。不过当$k$大于$n$时，必须改用公式(7)。

例3 试求多项式

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3$$

根的方幂和s_1，s_2，s_3，s_4，s_5。

解：$s_1 = -a_1$。应用(6)式，有

$$s_2 = -2a_2 - a_1 s_1 = a_1^2 - 2a_2;$$

$$s_3 = -3a_3 - a_1 s_2 - a_2 s_1 = -3a_3 + 2a_1 a_2 - a_1{}^3 + a_1 a_2$$
$$= -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3;$$

$$s_4 = -4a_4 - a_1 s_3 - a_2 s_2 - a_3 s_1$$
$$= -4a_4 - a_1(-a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3) - a_2(a_1^2 - 2a_2)$$
$$- a_3(-a_1)$$
$$= -4a_4 + a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 2a_2^2 + 4a_1 a_3.$$

求s_5时，用(7)式。

$$s_5 = -a_1 s_4 - a_2 s_3 - a_3 s_2 - a_4 s_1 = -a_1(a_1^4 - 4a_4 + 2a_2^2$$
$$- 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3) - a_2(-a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3) - a_3(a_1^2 - 2a_2)$$
$$- a_4(-a_1)$$
$$= -a_1^5 + 5a_1^3 a_2 - 5a_1 a_2^2 - 5a_1^2 a_3 + 5a_2 a_3 + 5a_1 a_4.$$

例4 求证：若一个四次多项式各根之和为0，则

$$\frac{s_5}{5}=\frac{s_3}{3}\cdot\frac{s_2}{2}\ .$$

解： 由条件知，这个多项式的系数$a_1=0$。根据上例的结果，

$$s_2=a_1^2-2a_2=-2a_2,$$

$$s_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3=-3a_3,$$

$$s_5=-a_1^5+5a_1^3a_2-5a_1a_2^2-5a_1^2a_3+5a_2a_3+5a_1a_4$$

$$=5a_2a_3\text{。}$$因而得证。

例5 试作n次多项式，使其

$$s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0\ .$$

解： 由于$s_1=-a_1$，所以$a_1=0$；$s_2=a_1^2-2a_2$，因而$a_2=0$；同法可证

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=0\ .$$

因而所求的多项式，只能形如

$$f(x)=x^n+a_n.$$

另一方面，由于多项式$f(x)=x^n+a_n$的系数$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0$，利用(6)式，可得

$$s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0\ .$$

所以$f(x)=x^n+a_n$为所求的多项式（a_n无限制）。

习　题　8.4

1．试求多项式$f(x)=7x^4-14x^3-7x+7$的根三次幂的和s_3。

2．试求多项式$f(x)=x^5-4x^3+x+1$的根五次幂的和s_5。

3. 试求多项式$f(x)=x^4+x^3+1$的根四次幂的和s_4。

4. 已知多项式

$$f(x)=x^n+\frac{x^{n-1}}{1!}+\frac{x^{n-2}}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

试求其根的方幂和s_1，s_2，…，s_n。

5. 若一元六次多项式$f(x)$根的方幂和$s_1=s_3=0$，求证：$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}$.

6. 试求n次多项式$f(x)$，已知其根的方幂和$s_2=s_3=\cdots=s_n=0$.

7. 设x_1，x_2，x_3，满足

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3=a, \\ x_1^5+x_2^5+x_3^5=b, \\ x_1^7+x_2^7+x_3^7=c. \end{cases}$$

求证：$21b^2-25ac=0$.

§8.5 结　　式

一、什么是结式？

从本节开始，转入一个新的课题：以多元多项式为工具讨论两个一元多项式的公根，以及一元多项式的重根，继而研究二元方程组的求解。本节的讨论均在复数域上进行。

设有一元多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\ (a_0\neq0), \qquad (1)$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,\ (b_0\neq0). \qquad (2)$$

若$f(x)$和$g(x)$有公共的复根α，则α称为$f(x)$和$g(x)$的公根。

假定α_1，α_2，…，α_n是$f(x)$的n个根，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$g(x)$的$m$个根。

定义1

$$R(f,g)=a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j) \qquad (3)$$

称为$f(x)$和$g(x)$的结式。

注意：“Π”是希腊字母“π”的大写，表示连乘的意思。如$\prod_{i=1}^{n}a_i$表示形如a_i的因子从a_1乘到a_n，即$\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n$。如$\prod_{i=1}^{n}i=1\cdot 2\cdots n=n!$。而$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$是二重乘积，先固定$i$，则$\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)=(\alpha_i-\beta_1)(\alpha_i-\beta_2)\cdots\cdot(\alpha_i-\beta_m)$，再让$i$从1到$m$，得$n\times m$个因子的乘积：

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)=&(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_m)\\ &\cdot(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots(\alpha_2-\beta_m)\\ &\cdots\cdots\\ &\cdot(\alpha_n-\beta_1)(\alpha_n-\beta_2)\cdots(\alpha_n-\beta_m).\end{aligned}$$

总之，连乘号“Π”的用法与连加号“Σ”的用法是类似的。

也就是说，$R(f,g)$是$f(x)$的根与$g(x)$的根所有差的总乘积再乘$a_0{}^m b_0{}^n$。

若$f(x)$与$g(x)$有公根α，α_i则一定是α中的一个，也是β_j

中的一个，(3)中必有一个因子是$\alpha-\alpha=0$；反之，若$R(f,g)=0$，由于$a_0^m b_0^n\neq 0$，故nm个因子$\alpha_i-\beta_j$中至少有一个是0，即至少有一个公根。

于是得到下面的

定理1 若$f(x)$与$g(x)$中$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$（见(1)、(2)），则$R(f,g)=0$的充要条件是$f(x)$与$g(x)$有公根。

用定义求出结式后再来判断有无公根，显然没有什么意义，因为这样须先知道所有的根。所以，如用结式来判断有无公根，必须找出计算结式的另外的方法。

定理2 在定理1的条件下，有

$$R(f,g)=a_0^m\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i).\qquad(4)$$

证明：在复数域上$g(x)$可展为一次因式的乘积

$$g(x)=b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_m)$$

$$=b_0\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$$

$$g(\alpha_i)=b_0\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j).\ (i=1,2,\cdots,n)$$

根据定理1，得

$$R(f,g)=a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$$

$$=a_0^m\prod_{i=1}^{n}\left[b_0\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)\right]$$

$$=a_0^m\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i).$$

证毕。

定理3　在定理1的条件下，有

$$R(g,f)=(-1)^{mn}R(f,g)。\qquad (5)$$

证明： 由定理1，有

$$R(g,f)=b_0^n c_0^m\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\beta\ -\alpha_i)$$

$$=a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_i)$$

$$=a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left[-(\alpha_i-\beta_j)\right]$$

$$=(-1)^{mn}a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$$

$$=(-1)^{mn}R(f,g)。$$

证毕。

定理4　$R(f,g)=(-1)^{mn}b_0^n\prod_{j=1}^{m}f(\beta_j)$。　(6)

证明： 由定理2知，

$$R(g,f)=b_0^n\prod_{j=1}^{m}f(\beta_j)。$$

但从定理 3 可知

$$R(g,f)=(-1)^{mn}R(f,g)。$$

所以$R(f,g)=(-1)^{-mn}R(g,f)=(-1)^{mn}R(g,f)$

$$=(-1)^{mn}b_0^n\prod_{j=1}^{m}f(\beta_j)。$$

注意： 定理2将结式用$f(x)$的根代入$g(x)$的函数值表示．定理3说明$R(f,g)$与$R(g,\ f)$最多只能差一个符号．而定 理4

是用$g(x)$的根代入$f(x)$的函数值来表达$R(f, g)$。

这些定理为我们计算和讨论结式提供了方便。

例1 设 $f(x)=\dfrac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$,

$$g(x)=\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1,$$

试求$R(f,g)$。

分析：$f(x)$的复根为5次单位根中除$\varepsilon_0=1$之外的四个根：ε_1，ε_2，ε_3，ε_4。利用定理2,可求出结式。

解：由定理3，并根据$\varepsilon_i^5=1$(从而$\varepsilon_i^7=\varepsilon_i^2$)以及根与系数的关系($f(x)$的根是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$)可得

$$R(f,g)=g(\varepsilon_1)g(\varepsilon_2)g(\varepsilon_3)g(\varepsilon_4)$$
$$=\frac{(\varepsilon_1^7-1)(\varepsilon_2^7-1)(\varepsilon_3^7-1)(\varepsilon_4^7-1)}{(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_2-1)(\varepsilon_3-1)(\varepsilon_4-1)}$$
$$=\frac{(\varepsilon_1^2-1)(\varepsilon_2^2-1)(\varepsilon_3^2-1)(\varepsilon_4^2-1)}{(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_2-1)(\varepsilon_3-1))\varepsilon_4-1)}$$
$$=(\varepsilon_1+1)(\varepsilon_2+1)(\varepsilon_3+1)(\varepsilon_4+1)$$
$$=1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)+(\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_3\varepsilon_4)+(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$
$$+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$$
$$=1-1+1-1+1=1.$$

例2 求多项式

$$f(x)=x^n+x+1\text{与}g(x)=x^2-3x+2$$

的结式。

解：多项式$g(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$有两个根$a_1=1$和$a_2=2$。由定理3，

$$R(f,g)=f(1)\cdot f(2)=(1^n+1+1)(2^n+2+1)$$
$$=3\cdot(2^n+3).$$

例3 求$f(x)=x^n+1$和$g(x)=(x-1)^n$的结式。

解：$g(x)$ 的根只有1 (n重根)。由定理4，

$$R(f,g)=(-1)^{n^2}f^n(1)=2^n\cdot(-1)^{n^2}$$
$$=\begin{cases}2^n, & \text{当}n\text{为偶数时};\\ -2^n, & \text{当}n\text{为奇数时}.\end{cases}$$

例4 设 $f(x)=n!\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$,

$$g(x)=n!\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

求$R(f,g)$。

解：设α_1，α_2，…，α_n是$f(x)$的n个复根，则$g(\alpha_i)=f(\alpha_i)-\alpha_i^n=-\alpha_i^n$ (因$f(\alpha_i)=0$)。

$$R(f,g)=\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)=\prod_{i=1}^{n}(-\alpha_i^n)=(-1)^n(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^n.$$

而由韦达定理，$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n n!$，

所以 $R(f,g)=(-1)^n[(-1)^n n!]^n=(-1)^n(-1)^{n^2}(n!)^n$
$$=(-1)^{n(n+1)}(n!)^n=(n!)^n.$$

(因$n(n+1)$是偶数，$(-1)^{n(n+1)}=1$)

二、用系数表示结式

如果两多项式的根都不知道，就不能利用(3)、(4)或(6)式计算结式。这时，可以利用对称多项式的基本定理，将结式用多项式的系数表示出来。

事实上，若将$f(x)$的根$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$视为变量，那末，

$R(f,g)$是α_1，α_2，…，α_n的对称多项式，根据韦达定理，$R(f,g)$可表为α_1，α_2，…，α_n的多项式。

例5 判断多项式

$$f(x)=x^2+3x+2,$$
$$g(x)=x^2-2x+1$$

在复数域上有无公根？

分析：只须判定$R(f,g)$是否为零。

解：由(4)，设α_1，α_2为$f(x)$的根，则

$$R(f,g)=g(\alpha_1)g(\alpha_2)=(\alpha_1^2-2\alpha_1+1)(\alpha_2^2-2\alpha_2+1)$$
$$=\alpha_1^2\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+4\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2+\alpha_2^2-2(\alpha_1+\alpha_2)+1.$$

由韦达定理

$$\alpha_1+\alpha_2=-3,\ \alpha_1\alpha_2=2,$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-2\alpha_1\alpha_2=5.$$

所以 $R(f,g)=4+12+8+5+6+1=36\neq 0$。

由定理1，$f(x)$与$g(x)$无公根。

例6 λ为何值时，多项式$f(x)=x^3+\lambda x^2+x-1$与$g(x)=x^2+3x+7$有公根？

分析：只须看$R(f,g)$何时为零。

解：设β_1，β_2是$g(x)$的根，则

$$R(f,g)=(-1)^6R(g,f)=R(g,f)=f(\beta_1)f(\beta_2)$$
$$=(\beta_1^3+\lambda\beta_1^2+\beta_1-1)(\beta_2^3+\lambda\beta_2^2+\beta_2-1)=\beta_1^3\beta_2^3$$
$$+\lambda\beta_1^2\beta_2^2(\beta_1+\beta_2)+\beta_1\beta_2(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\beta_1^3$$
$$+\beta_2^3)+\lambda^2\beta_1^2\beta_2^2+\lambda\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)+\beta_1\beta_2-\lambda$$
$$\cdot(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\beta_1+\beta_2)+1.$$

由于$\beta_1\beta_2=7$，$\beta_1+\beta_2=-3$，$\beta_1^2+\beta_2^2=(\beta_1+\beta_2)^2$

$-2\beta_1\beta_2=9-14=-5$，$\beta_1^3+\beta_2^3=(\beta_1+\beta_2)^3-3\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)$
$=-27+21\cdot 3=36$，故

$$R(f,g)=7^3+7^2\cdot(-3)\lambda+7\cdot(-5)-36+7^2\lambda^2+7$$
$$+7\cdot(-3)\lambda+5\lambda+3+1=49\lambda^2-163\lambda+283.$$

解方程　$49\lambda^2-163\lambda+283=0$，得

$$\lambda=\frac{163\pm\sqrt{28899}\,i}{98}.$$

例7　计算

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

的结式。其中$a_0\neq 0$，$a_n\neq 0$。

解：设α_1，α_2，…，α_n为$f(x)$的根，则

$$g(\alpha_i)\alpha_i+a_n=f(\alpha_i)=0.$$

由于$a_n\neq 0$，故$\alpha_i\neq 0$，$g(\alpha_i)=-\dfrac{a_n}{\alpha_i}$.

$$R(f,g)=a_0^{n-1}g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_n)$$
$$=(-1)^n a_0^{n-1}a_n^n\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$$
$$=a_0^n a_n^{n-1}.$$

（由于$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n a_0^{-1}a_n$）

习　题　8.5

1.试求$R(f,g)$。已知：

(1)　$f(x)=x^3+3x^2+3x+1$，$g(x)=2x^2+x+1$；

(2)　$f(x)=2x^3+3x^2+2x+1$，$g(x)=2x^2+3x+2$；

(3)　$f(x)=2x^4-x^3+3$，$g(x)=3x^3-x^2+4$；

(4) $f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$, $g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$.

2. 当λ取何值时，以下多项式有公根：

(1) $x^3-\lambda x+2$和$x^3+\lambda x+2$；

(2) $x^3+\lambda x^2-9$和$x^3+\lambda x-3$；

3. 证明：$R(f, g_1g_2)=R(f, g_1)\cdot R(f, g_2)$。

4. 下列多项式有无公根？

(1) $f(x)=x^2-6x+2$, $g(x)=x^2+x+5$；

(2) $f(x)=3x^3-4x^2+5x+6$, $g(x)=9x^3+2x+4$；

(3) $f(x)=x^n-1$, $g(x)=x^n+1$；

(4) $f(x)=x^{n+1}-x^n-x+1$, $g(x)=(n+1)x^n-nx^{n-1}-1$。

5. 若$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中$g(x)$首项系数为1，求证：

$$R(g,f)=R(g, r).$$

§8.6 判别式

一、什么是判别式？

我们知道，多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\ (a_0\neq 0) \qquad (1)$$

有重因式等价于$f(x)$与导数$f'(x)$不互素，而复数域上的多项式有重根与有重因式是一致的，所以，复数域上的多项式$f(x)$有重根的充要条件是f与f'有公根。再应用上节关于结式的定理，得出以下准则：

复数域上多项式$f(x)$有重根的充要条件是$R(f,f')=0$。

于是，结式可以作为判断多项式有无重根的工具。

下面，我们来计算$R(f, f')$。

定理1 $R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2$。

其中α_1，α_2，…，α_n是$f(x)$的n个复根。

注意： $\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2$表示一切形如$(\alpha_i-\alpha_j)^2$的乘积，其中$i>j$，但$i$不能大于$n$，$j$不能小于1。

证明： 由上节定理2，可知

$$R(f,f')=a_0^{n-1}f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)\cdots f'(\alpha_n)。$$

另一方面，$f(x)$可写成

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)。\qquad (2)$$

对它求导数，得

$$f'(x)=a_0(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)+\cdots+a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)。$$

$$f'(\alpha_i)=a_0(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)。$$

故 $R(f, f')=a_0^{2n-1}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)$

$\cdot(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)\ \cdots$

$\cdot(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$。

以上乘积共$n(n-1)$个因子，一对i和$j(i\neq j)$对应两个相反的因子：$\alpha_i-\alpha_j$和$\alpha_j-\alpha_i$，其积为$(-1)(\alpha_i-\alpha_j)^2$（不妨假定$i>j$）。

于是，有

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2。$$

定义1 多项式$f(x)$（见（1））的判别式是

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2. \qquad (3)$$

将(3)式与定理1比较，可得

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0 D(f), \qquad (4)$$

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f,f'). \qquad (5)$$

推论 1 $D(f)=0$当且仅当$f(x)$（见(1)）有重根。

证明：$f(x)$有重根相当于它的一个根与另一个根相等，因而等价于(3)的一个因子为零，或$D(f)=0$。

二、判别式的求法

判别式是多项式的一个重要概念，用来判断有没有重根。求多项式的判别式$D(f)$有两个方法：一是将$D(f)$看作根α_1，…，α_n的对称多项式（对称性是显然的，因为任意交换两个根α_i和α_j时，$D(f)$不变），根据对称多项式基本定理，$D(f)$可表为α_1，…，α_n的初等对称多项式的多项式，因而$D(f)$可由$f(x)$的系数表示。另一个方法是通过计算f和f'的结式$R(f, f')$由(5)求出判别式。

例1 求多项式

$$f(x)=x^2+a_1x+a_2$$

的判别式$D(f)$。

解：方法(1) 设$f(x)$的复根为α_1和α_2，则

$$D(f)=(\alpha_2-\alpha_1)^2=\alpha_2^2+\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_2$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=a_1^2-4a_2.$$

方法(2) $R(f, f')=f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)$，$f'(x)=2x+a_1$，因而

$$R(f,\ f')=(2\alpha_1+a_1)(2\alpha_2+a_1)$$
$$=4\alpha_1\alpha_2+2a_1(\alpha_1+\alpha_2)+a_1^2$$
$$=4a_2-a_1^2.$$
$$D(f)=-R(f,\ f')=a_1^2-4a_2.$$

例2 求多项式

$$f(x)=x^3+px+q$$

的判别式。

解：方法(1) 设$f(x)$的复根为α_1，α_2，α_3，则$D(f)=(\alpha_2-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2$.表为初等对称多项式的多项式，可得（§8.3习题1——(4)）

$$D(f)=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2.$$

由于$\sigma_1=0$，$\sigma_2=p$，$\sigma_3=-q$，则有

$$D(f)=-4p^3-27q^2.$$

方法(2) $f'(x)=3x^2+p$.

设$f(x)$的根为α_1，α_2，α_3，由韦达定理得：

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$，$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=p$，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-q$，
$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=-2p$，$\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_1^2\alpha_3^2=p^2$.

$$R(f,f')=f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)f'(\alpha_3)$$
$$=(3\alpha_1^2+p)(3\alpha_2^2+p)(3\alpha_3^2+p)$$
$$=27\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+3p^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+9p(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2)+p^3$$
$$=27q^2+p^3-6p^3+9p^3=4p^3+27q^2.$$
$$D(f)=-R(f,\ f')=-4p^3-27q^2.$$

例3 试求$f(x)=x^3-3x+7$的判别式。

解：方法(1) 由上例知

$$D(f)=-4\cdot(-3)^3-27\cdot 7^2=-1215.$$

方法(2)　$f'(x)$的根为1和-1，$f(1)=5$，$f(-1)=9$。由§8.5定理2，

$$R(f',f)=3^3f(1)f(-1)=27\cdot 45=1215.$$

$$R(f,f')=(-1)^{2\cdot 3}R(f',f)=1215.$$

$$D(f)=-R(f,f')=-1215.$$

例4　当λ为何值时，多项式

$$f(x)=x^4-4x+\lambda$$

有重根？

解：$f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$。

$f'(x)$的根为三次单位根1，ε_1，ε_2。

$f(1)=1-4+\lambda=\lambda-3$；　$f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1^4-4\varepsilon_1+\lambda=\lambda-3\varepsilon_1$；$f(\varepsilon_2)=\varepsilon_2^4-4\varepsilon_2+\lambda=\lambda-3\varepsilon_2$。

$$R(f',f)=4^4f(1)f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)=256(\lambda-3)(\lambda-3\varepsilon_1)(\lambda-3\varepsilon_2).$$

$$R(f,f')=(-1)^{12}R(f',f)=256(\lambda-3)(\lambda-3\varepsilon_1)(\lambda-3\varepsilon_2).$$

因而当且仅当$\lambda=3$，$3\varepsilon_1$，$3\varepsilon_2$时，$f(x)$有重根。

例5　计算$f(x)=x^n+a$的判别式，并证明$f(x)$无重根。（这里$n>0$，$a\neq 0$）

解：$f'(x)=nx^{n-1}$。$f'(x)$的根只有0（$n-1$重根）。而$f(0)=a$，由上节定理2，

$$R(f',f)=n^nf^{n-1}(0)=n^na^{n-1}.$$

又由上节定理3，

$$R(f,f')=(-1)^{n(n-1)}R(f',f)=R(f',f)=n^na^{n-1}.$$

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^na^{n-1}.$$

$D(f)\neq 0$，故$f(x)$无重根。

注意：$f(x)$的n个根是$-a$的n次方根。

习 题 8.6

1. 试求以下多项式的判别式：

(1) x^3+3x^2-2；

(2) $2x^3+9x^2+9x+7$；

(3) $x^4-x^3+x^2+2x+2$；

(4) $x^5-5ax^3+5a^2x-b$；

(5) $(x^2-x)^3+2(x^2-x)^2+3(x^2-x)+1$。

2. 当 λ 为何值时，以下多项式有重根？

(1) $x^2+(1+\lambda)x+\lambda$；

(2) $x^3-\lambda x+2$；

(3) $x^3-\lambda x^2+(\lambda-3)x+1$；

(4) $x^4-\lambda x^3+3(\lambda-4)x^2-2(\lambda-8)x-4$。

3. 证明：多项式 $(x-a)f(x)$ 的判别式等于 $f(x)$ 的判别式乘 $f(a)$ 的平方。

4. 试求多项式

$$f(x)=n!\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

的判别式，并证明 $f(x)$ 无重根。

5. 试求多项式

$$f(x)=x^n-nx+2$$

的判别式。

§8.7 二元高次方程组

现在回到二元高次方程组的问题上来。设有方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \qquad (1)$$

其中f和g是复数域上的二元多项式。复数x_0，y_0若满足(1)中的两个方程，即

$$f(x_0,y_0)=0,\ g(x_0,\ y_0)=0,$$

则称(x_0,y_0)为（1）的解。

将f和g按x降幂排项，设

$$\begin{cases} F_y(x)=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(y)x+a_k(y), \\ G_y(x)=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}(y)x+b_l(y). \end{cases} \qquad (2)$$

其中$a_0(y)$，$a_1(y)$，…，$a_{k-1}(y)$，$a_k(y)$，$b_0(y)$，$b_1(y)$，…，$b_{l-1}(y)$，$b_l(y)$是复数域上变量y的一元多项式。

注意：也可按y的降幂排项。

若(x_0,y_0)是(1)的解，自然也是(2)的解。如果$a_0(y_0)$和$b_0(y_0)$都不等于零，把(2)视为一元多项式，则x_0是$Fy_0(x)$与$Gy_0(x)$的公根。由§8.5定理1，有

$$R(Fy_0,\ Gy_0)=0,$$

即y_0是y的一元多项式$R(F_y,\ G_y)$的根。

反之，设有某复数y_0，满足$a_0(y_0)\neq 0$，$b_0(y_0)\neq 0$，且y_0是$R(F_y,\ G_y)$的根，即

$$R(Fy_0,\ Gy_0)=0,$$

则$Fy_0(x)$和$Gy_0(x)$有公根。任取其公根x_0，那末$(x_0,\ y_0)$是原方程组的解。

由此可得二元方程组的解法，其步骤如下：

1.将两个二元多项式f和g按x(或按y，下同)的降幂排项，得方程组(2)。

2．求出$a_0(y)$的全部根及$b_0(y)$的全部根，对每个根β，检验$F_\beta(x)$与$G_\beta(x)$是否有公根（注：不一定有公根！）。若有公根α，则(α,β)是原方程组的解。

3．在y既不是$a_0(y)$也不是$b_0(y)$的根的假定下，作结式$R(F_y, G_y)$，并求出$R(F_y,G_y)$的全部根。

4．设β为$R(F_y,G_y)$的任一根，若$a_0(\beta)$和$b_0(\beta)$皆不为零，则$F_\beta(x)$与$G_\beta(x)$有公根　设α为其任一公根，则(α,β)是原方程组的解；若$a_0(\beta)$或$b_0(\beta)$为零，则在2中已讨论。

用这种方法，可以无遗漏地求出原方程组的全部解。

例1　解方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2-25=0, \\ x-3y+5=0. \end{cases}$$

解：按x降幂排项，得

$$F_y(x)=x^2+(y^2-25),$$

$$G_y(x)=x+(-3y+5).$$

$a_0(y)=1$，$b_0(y)=1$均无根。

下面求$R(F_y, G_y)$。

设α_1，α_2是F_y的根，则$\alpha_1+\alpha_2=0$，$\alpha_1\alpha_2=y^2-25$.

$$\begin{aligned} R(F_y,G_y)&=G_y(\alpha_1)G_y(\alpha_2) \\ &=[\alpha_1+(-3y+5)][\alpha_2+(-3y+5)] \\ &=\alpha_1\alpha_2+(-3y+5)(\alpha_1+\alpha_2)+(-3y+5)^2 \\ &=y^2-25+9y^2+25-30y \\ &=10y(y-3). \end{aligned}$$

其根为$y_1=0$，$y_2=3$.

当$y_1=0$时，$F_0(x)=x^2-25$，$G_0(x)=x+5$。其公根为$x=-5$，故$(-5,0)$是原方程组的解。

当$y_2=3$时，$F_3(x)=x^2-16$，$G_3(x)=x-4$。
其公根为$x=4$，故(4,3)，也是原方程组的解。原方程组的解因而是(－5，0)和(4，3)。

注意：此题开始时，也可按y降幂排项。

例2 解方程组：

$$\begin{cases} yx^2+3yx+2y-2=0, \\ (2y-2)x+(y-1)=0. \end{cases}$$

解：按x降幂排项，得

$$F_y(x)=yx^2+3yx+(2y-2),$$

$$G_y(x)=(2y-2)x+(y-1).$$

$a_0(y)=y$，其根为 0；$b_0(y)=2y-2$，其根为1。将$y=1$代入，可知

$$F_1(x)=x^2+3x=x(x+3),$$

$$G_1(x)=0.$$

其公根为$x=0$和$x=-3$。因此，(0,1)和(－3，1)都是解。

将$y=0$代入，可知

$$F_0(x)=-2,\ G_0(x)=-2x-1,$$

显然无公根（因$F_0(x)$无根）。

假定y不是$a_0(y)$也不是$b_0(y)$的根，求结式$R(F_y,G_y)$。

设α_1，α_2是$F_y(x)$的根，则$\alpha_1+\alpha_2=-3$，并且$\alpha_1\alpha_2=\dfrac{2y-2}{y}$。

$$\begin{aligned} R(F_y,G_y)&=y[(2y-2)\alpha_1+y-1][(2y-2)\alpha_2+y-1] \\ &=y(y-1)^2[4\alpha_1\alpha_2+2(\alpha_1+\alpha_2)+1] \\ &=y(y-1)^2\left[\frac{8(y-1)}{y}-5\right]=(y-1)^2(3y-8). \end{aligned}$$

其根为 1 和$\frac{8}{3}$。当$y=1$时，$b_0(y)=0$，前面已讨论。当

$y=\frac{8}{3}$时，

$$F_{\frac{8}{3}}(x)=\frac{8}{3}x^2+8x+\frac{10}{3},$$

$$G_{\frac{8}{3}}(x)=\frac{5}{3}(2x+1).$$

其公根为 $x=-\frac{1}{2}$。

因而，原方程组的解为$(0,1)$，$(-3,1)$，$\left(-\frac{1}{2},\frac{8}{3}\right)$。

例3 解方程组：

$$\begin{cases}x^2y^2+x^2y+x+y=0,\\ xy^2+xy+1=0.\end{cases}$$

解：$F_y(x)=(y^2+y)x^2+x+y,$

$G_y(x)=(y^2+y)x+1.$

$a_0(y)=y^2+y=y(y+1),$

$b_0(y)=y^2+y=y(y+1).$

其根为 0 和 -1。而$F_0(x)=x$与$G_0(x)=1$无公根；$F_{-1}(x)=x-1$与$G_{-1}(x)=1$也无公根。

下面假定y不是$a_0(y)$及$b_0(y)$的根，求结式$R(F_y,G_y)$。

设α_1，α_2是$F_y(x)$的根，则

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{1}{y(y+1)},$$

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{y}{y(y+1)} = \frac{1}{y+1}.$$

$$R(F_y, G_y) = (y^2+y)[(y^2+y)\alpha_1+1][(y^2+y)\alpha_2+1]$$
$$= (y^2+y)[(y^2+y)^2\alpha_1\alpha_2+(y^2+y)(\alpha_1+\alpha_2)+1]$$
$$= (y^2+y)[y^2(y+1)-1+1] = y^3(y+1)^2.$$

其根是 0 和 -1 上面已验证，这时对应的$F_y(x)$和$G_y(x)$无公根。

总之，原方程无解。

注意：若结式$R(F_y,G_y)$的根同时是$a_0(y)$或$b_0(y)$的根，方程组也可以有解。如例 3 的第二个方程，改为 $xy^2+xy=0$，第一个方程不变。这时：

$$F_y(x) = (y^2+y)x^2+x+y,\quad G_y(x) = (y^2+y)x,$$

$$a_0(y) = y^2+y = y(y+1),\quad b_0(y) = y^2+y = y(y+1).$$

$a_0(y)$及$b_0(y)$的根为 0 和 -1，而$F_0(x)=x$与$G_0(x)=0$有公根$x=0$。$F_{-1}(x)=x-1$与$G_{-1}(x)=0$有公根1。

设y不是$a_0(y)$或$b_0(y)$的根，假定α_1，α_2是$F_y(x)$的根，则$\alpha_1\alpha_2=\dfrac{1}{y+1}$。

$$R(F_y, G_y) = (y^2+y)[(y^2+y)\alpha_1][(y^2+y)\alpha_2]$$

$$= (y^2+y)^3\cdot\frac{1}{y+1} = y^3(y+1)^2.$$

其根为 0 和 -1，也是$a_0(y)$及$b_0(y)$的根，方程组有解 (0,0) 和(1, -1)。

由于在求解过程中，已提前把$a_0(y)$和$b_0(y)$的根单独检验过，所以不必担心漏根。

习　题　8.7

解方程组：

1. $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y + 4x + 4 = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y - 2 = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0, \\ 2x - y - 7 = 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x+y)^2(x-y) = 3xy + 6y, \\ x^2 - y^2 = x + 2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 + 3x + y + 1 = 0, \\ 3x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x + 2y + 2 = 0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0, \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0; \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0, \\ y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0, \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ x^n - y^n = b; \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 y + x^2 + 2xy + y^3 = 0, \\ x^2 - 6x - 3y^2 = 0. \end{cases}$

*§8.8 结式的行列式表示法

§8.5建立了复数域上多项式的结式。在那里，结式表为根的多项式函数。现在，我们建立一般数域上多项式的结式，并用多项式的系数表示，同时证明两种定义对复数域上的多项式是等价的。

在叙述中，需要用到线性方程组和行列式的基础知识，不具备这一条件的读者可以暂时不读本节。

一、结式的引入

设有数域P上两非零多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\ (n>0),\tag{1}$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m\ (m>0).\tag{2}$$

这里a_0，b_0不一定非零，也就是说，$f(x)$与$g(x)$的次数不一定是n和m。

我们知道，所谓$f(x)$和$g(x)$不互素，是指存在非零次多项式$h(x)$，满足$h(x)|f(x)$，$h(x)|g(x)$.为了判定两个多项式是否互素，可以利用辗转相除法，求出它们的最大公因式，最大公因式为非零次多项式是它们不互素的充要条件。

以下我们从另一个角度推导多项式$f(x)$与$g(x)$不互素的条件。

引理1 假设(1)，(2)中a_0，b_0不全为零，则$f(x)$与$g(x)$不互素的充要条件是存在非零多项式$u(x)$和$v(x)$，满足

$$u(x)f(x)=v(x)g(x),\tag{3}$$

其中$u(x)$的次数低于m，$v(x)$的次数低于n。

分析：根据引理1，在适当的假设下，$f(x)$与$g(x)$不互素等价于$f(x)$与$g(x)$有非当然公倍式（因为(3)式是$f(x)$与$g(x)$的公倍式，但不是当然公倍式）。

证明：必要性（由$f(x)$与$g(x)$不互素，推证$u(x)$与$v(x)$的存在）。

设$(f(x),g(x))=d(x)$，由于$f(x)$与$g(x)$不互素，故$d(x)$是非零次多项式。设$f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)\cdot d(x)$，则$f_1(x)$的次数低于$f(x)$的次数，自然更小于n。同理，$g_1(x)$的次数低于$g(x)$的次数，更小于m。令$u(x)=g_1(x)$，$v(x)=f_1(x)$，则

$$u(x)f(x)=g_1(x)f_1(x)d(x)=v(x)g(x)$$

成立。

充分性（由满足(3)式的$u(x)$与$v(x)$的存在，推证$f(x)$与$g(x)$不互素）。

用反证法。假定$f(x)$与$g(x)$互素，由引理条件知，a_0与b_0不全为零。不妨设$a_0\neq 0$，即$f(x)$的次数为n，设(3)式为$h(x)$，则$h(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公倍式。显然$h(x)(=v(x)\cdot g(x))$的次数低于$f(x)g(x)$的次数，但由§3.5性质4，$f(x)\cdot g(x)$是$f(x)$和$g(x)$的最小公倍式，即$f(x)g(x)$整除$h(x)$，从而得到矛盾。因此$f(x)$与$g(x)$不互素。

证毕。

引理1可用方程组和行列式表达。$u(x)$是次数低于m的多项式，$v(x)$是次数低于n的多项式，所以$u(x)$及$v(x)$可写成如下形式：

$$u(x)=u_0x^{m-1}+u_1x^{m-2}+\cdots+u_{m-1}, \tag{4}$$

$$v(x)=v_0x^{n-1}+v_1x^{n-2}+\cdots+v_{n-1}. \tag{5}$$

$$u(x)f(x)=a_0u_0x^{m+n-1}+(a_1u_0+a_0u_1)x^{m+n-2}$$
$$+(a_2u_0+a_1u_1+a_0u_2)x^{m+n-3}+\cdots+(a_nu_{m-2}$$
$$+a_{n-1}u_{m-1})x+a_nu_{m-1}.$$

$$v(x)g(x)=b_0v_0x^{m+n-1}+(b_1v_0+b_0v_1)x^{m+n-2}$$
$$+(b_2v_0+b_1v_1+b_0v_2)x^{m+n-3}+\cdots+(b_mv_{n-2}+b_{m-1}v_{n-1})x$$
$$+b_mv_{n-1}.$$

等式(3)等价于下面$m+n$个等式：

$$\begin{cases} a_0u_0=b_0v_0, \\ a_1u_0+a_0u_1=b_1v_0+b_0v_1, \\ a_2u_0+a_1u_1+a_0u_2=b_2v_0+b_1v_1+b_0v_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_nu_{m-2}+a_{n-1}u_{m-1}=b_mv_{n-2}+b_{m-1}v_{n-1}, \\ a_nu_{m-1}=b_mv_{n-1}. \end{cases} \tag{6}$$

或者写成

$$\begin{cases} a_0u_0-b_0v_0=0, \\ a_1u_0+a_0u_1-b_1v_0-b_0v_1=0, \\ a_2u_0+a_1u_1+a_0u_2-b_2v_0-b_1v_1-b_0v_2=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_nu_{m-2}+a_{n-1}u_{m-1}-b_mu_{n-2}-b_{m-1}v_{n-1}=0, \\ a_nu_{m-1}-b_mv_{n-1}=0. \end{cases} \tag{7}$$

把(6)及(7)看作变量为$u_0,u_1,\cdots,u_{m-1},v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}$的方程组。若满足(3)的$u(x)$和$v(x)$存在，由于$u(x)\neq 0(x)$，$v(x)\neq 0(x)$，(6)或(7)就有非零解，这个解由$u(x)$和$v(x)$的系数组成。

根据线性方程组的基本知识，(7)有非零解当且仅当其系

数行列式等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & & & & -b_0 & & \\ a_1 & a_0 & & & -b_1 & -b_0 & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_n & a_{n-1} & & & -b_m & -b_{m-1} \\ & & a_n & & & & -b_m \end{vmatrix}=0. \qquad (8)$$

由行列式的基本性质可知，D进行转置后其值不变。将D转置，并把所有$-b_i$的符号同时去掉，得行列式

$$\left.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行} \end{array}\right. \qquad (9)$$

显然，$D=0$与行列式(9)等于零是等价的，因为D和(9)最多相差一个符号。

定义1 $m+n$阶行列式(9)称为$f(x)$和$g(x)$的结式，记

为 $\overline{R}(f,g)$。注

注意：结式的构造很有规律。

首先，结式的阶数 $=m+n$。其次，前m行由$f(x)$的系数和零组成，后n行由$g(x)$的系数和零组成。$f(x)$和$g(x)$的系数形成行列式中两个平行四边形，每个平行四边形的一个顶点在第一列，另一个顶点在最后一列。

从结式的引入过程，可得下面的

定理1 设$f(x)$和$g(x)$是数域P上形如(1)式与(2)式的非零多项式，则结式 $\overline{R}(f,g)=0$的充要条件是：(1)$f(x)$与$g(x)$不互素，或(2)$a_0=b_0=0$。

分析：证明分两部分。充分性是说，两个条件中的每个条件都可以推出$\overline{R}(f,g)=0$；必要性是由$\overline{R}(f,g)=0$推证两条件应至少有一成立，或者，若(2)不成立，则(1)一定成立。

证明：充分性。

(1) 若$f(x)$与$g(x)$不互素，由引理1，存在非零多项式$u(x)$和$v(x)$，使$u(x)$次数小于m，$v(x)$次数小于n，满足$u(x)f(x)=v(x)g(x)$，即方程组(6)或(7)存在非零解。因而$D=0$，$\overline{R}(f,g)=0$。

(2) 若$a_0=b_0=0$，则得到的$R(f,g)$的第一列都是0，因而$\overline{R}(f,g)=0$。

必要性。

注 结式(9)也称为西尔外斯特(*Sylvester*，1814—1897，英国数学家)结式.

如果$\overline{R}(f,g)=0$。若a_0，b_0不全为零，不妨设$b_0\neq 0$，因而$g(x)$是m次的多项式，由$\overline{R}(f, g)=0$推出$D=0$，所以方程组(7)或(6)有非零解。若设解为（u_0，u_1，…，u_{m-1}，v_0，v_1，…，v_{n-1}），则由它组成两个多项式

$$u(x)=u_0x^{m-1}+u_1x^{m-2}+\cdots+u_{m-1},$$

$$v(x)=v_0x^{n-1}+v_1x^{n-2}+\cdots+v_{n-1}.$$

$u(x)$和$v(x)$不全为$0(x)$，其系数满足(6)式，因而满足等式

$$u(x)f(x)=v(x)g(x). \tag{10}$$

又因$f(x)$和$g(x)$都不是$0(x)$，从(10)可见，$u(x)$和$v(x)$必都不是$0(x)$。而由$u(x)$和$v(x)$的构成，知道其次数应分别低于m和n。根据引理1，$f(x)$和$g(x)$不互素。

证毕。

如果a_0与b_0不全为零，则$f(x)$与$g(x)$不互素等价于$\overline{R}(f,g)=0$。

对于复数域上的多项式，有

推论1 复数域上的非零多项式$f(x)$和$g(x)$的结式$\overline{R}(f,g)=0$的充要条件是f和g在复数域上有公根，或$a_0=b_0=0$。

证明：若$f(x)$和$g(x)$在复数域上有公根α，由因式定理，$x-\alpha$是$f(x)$和$g(x)$的公因式；反之，若$f(x)$和$g(x)$不互素，即有非零次公因式$d(x)$。由于$d(x)$在复数域上至少有一个根α，因而，$(x-\alpha)|d(x)$，$x-\alpha$是$f(x)$和$g(x)$的公因式，α是其公根。所以$f(x)$和$g(x)$在复数域上有公根与不互素是完全等价的。把定理1中的“不互素”改为“有公根”时，即得推论。

注意：在一般数域上，“有公根”和“不互素”是两个不同的概念。前者保证后者，但后者不能推出前者。如多项式

$$f(x)=x^2+1,\ g(x)=(x^2+1)(x^2+2)$$

看作实数域（或有理数域）上的多项式时，显然不互素，但无公共实根（或有理根）。

下面，利用本节推论1，重新做§8.5的例5至例7。

例1 （即§8.5例5）判断多项式

$$f(x)=x^2+3x+2,\quad g(x)=x^2-2x+1$$

在复数域上有无公根？

分析：由推论1，只须判定结式$\overline{R}(f,g)$是否为零。

解：

$$\overline{R}(f,g)=\begin{vmatrix}1&3&2&0\\0&1&3&2\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{vmatrix}=36\neq0,$$

因而$f(x)$与$g(x)$无公根。

例2 （即§8.5例6）λ为何值时，

$$f(x)=x^3+\lambda x^2+x-1,\quad g(x)=x^2+3x+7$$

有公根？

解：首先，写出$f(x)$与$g(x)$的结式（它是λ的函数）：

$$\overline{R}(f,g)=\begin{vmatrix}1&\lambda&1&-1&0\\0&1&\lambda&1&-1\\1&3&7&0&0\\0&1&3&7&0\\0&0&1&3&7\end{vmatrix}=49\lambda^2-163\lambda+283.$$

解二次方程 $49\lambda^2-163\lambda+283=0$，得

$$\lambda=\frac{163\pm\sqrt{28899}\,i}{98}.$$

例3 （即§8.5例7）计算多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

的结式。

解：

$$\overline{R}(f,g)=\left|\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & & a_0 & a_1\cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & & \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array}\right|\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}n-1\text{行}\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}n\text{行}\end{array}$$

行列式中的第n行，第$n+1$行，…，第$2n-2$行分别乘以-1加到第1，第2，…，第$n-1$行（这样做，行列式保持不变）。得

$$\overline{R}(f,g)=\left|\begin{array}{ccccccc} & & & & a_n & & \\ & & & & & a_n & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & a_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array}\right|$$

$$=a_0^n a_n^{n-1}.$$

二、两种定义的等价性

这里定义的结式与§8.5定义的结式形式是不同的。结式$\overline{R}(f,g)$是$f(x)$与$g(x)$系数的多项式，而$R(f,g)$是a_0,b_0（要求$a_0b_0\neq 0$）以及根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的多项式。两个定义是不是等价的呢？

定理2 设$f(x)$和$g(x)$是复数域上的两个多项式，它们分别形如(1)和(2)，且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，则

$$R(f,g)=\overline{R}(f,g).$$

分析：把$\overline{R}(f,g)$中各a_i和b_j表示为f和g根的多项式，因而$\overline{R}(f,g)$可写成根的多项式。证明$\overline{R}(f,g)$与$R(f,g)$是根的相同的多项式。

证明：将$\overline{R}(f,g)$（见(9)式）的前m行提出因子a_0，后n行提出因子b_0，得

$$\overline{R}(f,g)=a_0^m b_0^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1}{a_0} & \cdots & \frac{a_n}{a_0} & & \\ & \cdots\cdots & & & & \\ & & 1 & \frac{a_1}{a_0} & \cdots & \frac{a_n}{a_0} \\ 1 & \frac{b_1}{b_0} & \cdots & \frac{b_m}{b_0} & & \\ & \cdots\cdots & & & & \\ & & 1 & \frac{b_1}{b_0} & \cdots & \frac{b_m}{b_0} \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n\text{行}\end{matrix}. \tag{11}$$

由韦达定理，

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\cdots\alpha_n,\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{b_1}{b_0}=-(\beta_1+\cdots+\beta_m), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{b_m}{b_0}=(-1)^m\beta_1\cdots\beta_m.\end{cases} \tag{12}$$

设(11)式右端的行列式为$D_1(\frac{a_1}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}, \frac{b_1}{b_0}, \cdots, \frac{b_m}{b_0})$，则它也是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$的多项式。设为$T(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m)$，因而

$$\overline{\mathrm{R}}(f,g)=a_0^m b_0^n T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m). \tag{13}$$

现在，将T先看作变量α_1的一元多项式，将其它的根$\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m$视为常量。设$T$被$\alpha_1-\beta_1$除的商式为$q(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m)$，余式为$r(\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m)$。即

$$\begin{aligned} &T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m) \\ &=q(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)(\alpha_1-\beta_1) \\ &\quad +r(\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m). \end{aligned} \tag{14}$$

由于当$\alpha_1=\beta_1$时，$f(x)$与$g(x)$有公根，因而$\overline{\mathrm{R}}(f,g)=0$。由$a_0^m b_0^n \neq 0$，即得

$$T(\beta_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)=0.$$

从(14)式可见，$r(\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)=0$。即

$$\begin{aligned} &T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m) \\ &=q(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)(\alpha_1-\beta_1). \end{aligned}$$

再设 $q(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)$

$$\begin{aligned} &=q_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m)(\alpha_1-\beta_2) \\ &\quad +r_1(\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m). \end{aligned}$$

因此 $T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)$

$$=q_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)$$
$$+r_1(\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)(\alpha_1-\beta_1).$$

同理可得$r_1(\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)=0$.

依照同样的方法，可从T中分解出所有形如$\alpha_i-\beta_j(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$的因子。因而存在多项式$H(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，满足下式：

$$T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)$$
$$=H(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1\cdots,\beta_m)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j). \qquad (15)$$

下面我们来证明H就是1.

行列式D_1展开后，每一项必形如$\pm\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{a}{a_0}\right)^{k_n}\cdot\left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{b_m}{b_0}\right)^{l_m}$，且$k_1+\cdots+k_n\leqslant m,l_1+\cdots+l_m\leqslant n$.再由(12)式可知，$T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)$中，每个$\alpha_i$的次数不能超过$m$，每个$\beta_j$的次数不能超过$n$。而$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$中各$\alpha$和$\beta$的最高次数分别是$m$和$n$。从(15)式可见，$H$必是零次多项式，设为$c$，那末

$$T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)=c\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j). \qquad (16)$$

在D_1的展开式中，有且仅有一项不含任何$\frac{a_i}{a_0}$（即主对角线上元素连乘的那一项），该项是$1\cdots1\cdot\frac{b_m}{b_0}\cdots\frac{b_m}{b_0}$

$=\dfrac{b_m^n}{b_0}$，它表为根的多项式时应为 $(-1)^{mn}\beta_1^n\cdots\beta_m^n$。这就是$T$中唯一不含任意$\alpha_i$的项。另一方面，从(16)式右端显见，$T$中唯一不含任何$\alpha_i$的项是

$$c(-\beta_1)^n\cdots(-\beta_m)^n=c(-1)^{mn}\beta_1^n\cdots\beta_m^n,$$

因而$c=1$。

最后，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{R}(f,g)&=a_0^m b_0^n T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)\\&=a_0^m b_0 \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)\\&=R(f,g).\end{aligned}$$

注意：当a_0或b_0为0时，$f(x)$或$g(x)$的次数不定，因而根的个数不定，$\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$的表示式没有意义。因此，一般说来，用行列式定义的结式$\overline{R}(f,g)$应用范围要广一些，而且适应于任何数域上的多项式。但今后多半考虑复数域上的多项式，根据定理2，两种方法定义的结式是相等的，所以以后在记号上不加区分，凡结式均记作R(f,g)。

三、判别式的计算

结式的行列式表示法，给多项式判别式的计算开辟了一条新的途径。

例4 试求

$$f(x)=2x^3+9x^2+9x+7$$

的判别式。

解： $f'(x)=6x^2+18x+9$，故

$$R(f,f')=\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 9 & 7 \\ 6 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 9 \end{vmatrix}=18252.$$

由§8.6(5)式，$D(f)=(-1)^{\frac{3\times 2}{2}}\times\frac{1}{2}\times 18252=-9126.$

例5 当λ为何值时，多项式

$$f(x)=x^4-4x+\lambda$$

有重根？

解： $f'(x)=4x^3-4$，故

$$R(f,f')=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & \lambda \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

第4至第7行提出4，然后将新的第4行至第6行乘－1分别加到第1至第3行，再将第1至第4列分别加到第4至第8列，得到

$$R(f,f')=4^4\begin{vmatrix}0&0&0&-3&\lambda&0&-3\\0&0&0&0&-3&\lambda&0\\0&0&0&0&0&-3&\lambda\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{vmatrix},$$

所以$R(f,f')=4^4(\lambda^3-3^3)$。

$$D(f)=(-1)^{\frac{4\times3}{2}}\times\frac{1}{1}\times4^4(\lambda^3-3^3)=4^4(\lambda^3-3^3)。$$

$D(f)=0$ 当且仅当$\lambda^3-3^3=0$，即λ为$3,3\varepsilon,3\varepsilon^2$，其中

$\varepsilon=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。

所以当且仅当$\lambda=3,3\varepsilon,3\varepsilon^2$时，$f(x)$有重根。与§8.6例4结果相同。

四、二元高次方程组的解法

现在，用结式的行列式表示法再来讨论二元高次方程组。

设有方程组

$$\begin{cases}f(x,\ y)=0,\\g(x,\ y)=0.\end{cases}\qquad(17)$$

其中f和g是复数域上的二元多项式。

将f和g按x的降幂排项，得

$f(x,y)=F_y(x)=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(y)x$

$$+a_k(y), \tag{18}$$

$$g(x,y)=G_y(x)=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}(y)x$$
$$+b_l(y).$$

其中$a_i(y)$和$b_j(y)$($i=0, 1, \cdots, k-1, k$; $j=0, 1, \cdots, l-1, l$)是复数域上的一元多项式。

$F_y(x)$和$G_y(x)$的结式$R(F_y, G_y)$改记为$R_x(f, g)$，表示按x的方幂排项的结式，显然它是含y的行列式，因而是y的一元多项式。同样，$R_y(f, g)$则表示按y的方幂排项的结式，是x的一元多项式。如

$$f(x, y)=x^2y+3xy+2y+3,$$
$$g(x, y)=2xy-2x+2y+3.$$

容易看出

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix}=2y^2+11y+12,$$

$$R_y(f, g)=\begin{vmatrix} x^2+3x+2 & 3 \\ 2x+2 & -2x+3 \end{vmatrix}=-2x^3-3x^2-x.$$

一般地，有

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} a_0(y)a_1(y)\cdots a_k(y) & & \\ & \cdots\cdots & \\ & & a_0(y)a_1(y)\cdots a_k(y) \\ b_0(y)b_1(y)\cdots b_l(y) & & \\ & \cdots\cdots & \\ & & b_0(y)b_1(y)\cdots b_l(y) \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} l\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} k\text{行} \end{matrix}. \tag{19}$$

定理3 设(x_0, y_0)是方程组(17)的复数解，则y_0是$R_x(f,g)=0$的复根；反之，若y_0是方程$R_x(f,g)=0$的复根，则或者$a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$，或者存在x_0，使(x_0, y_0)是(17)的复数解。

证明：设(x_0, y_0)是方程组(17)的复数解，那末x的一元多项式

$$f(x,y_0)=a_0(y_0)x^k+a_1(y_0)x^{k-1}+\cdots+a_k(y_0), \quad (20)$$

$$g(x,y_0)=b_0(y_0)x^l+b_1(y_0)x^{l-1}+\cdots+b_l(y_0) \quad (21)$$

必有公根x_0，由本节推论1，(20)，(21)的结式等于零。而(20)，(21)的结式正是结式$R_x(f, g)$在$y=y_0$时的情况，这就是说，y_0是$R_x(f, g)=0$的复根。

反之，若y_0是$R_x(f, g)=0$的复根，那末根据推论1，或者有$a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$，或者(20)，(21)有公根。设x_0为一公根，则$f(x_0, y_0)=0$，$g(x_0, y_0)=0$，(x_0, y_0)是方程组的复数解。

注意：若y_0是方程$R_x(f, g)=0$的根，又$a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$，那末$f(x,y_0)$和$g(x,y_0)$不一定有公根；但若$a_0(y_0)\neq 0$或$b_0(y_0)\neq 0$，则$f(x,y_0)$和$g(x,y_0)$一定有公根，而且公根个数可以多于1个。

定理3提供了二元高次方程组(17)的解法，其步骤如下：

1. 将两个二元多项式按x（或按y）的降幂排项，得方程组(18)；

2. 计算$R_x(f,g)$（或$R_y(f,g)$）；

3. 求出$R_x(f,g)$（或$R_y(f,g)$）的全部复根。设β是$R_x(f, g)$的根，若一元多项式$f(x, \beta)$和$g(x, \beta)$有公根α，则(α, β)是原方程组(17)的复数解。

这样可求得方程组的全部解。

例6 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-25=0, \\ x-3y+5=0. \end{cases}$$

解：代入法。

由$x-3y+5=0$可得$x=3y-5$，代入第一方程，得$9y^2-30y+25+y^2=25$，或$y^2-3y=0$，$y(y-3)=0$，$y_1=0$，$y_2=3$。

由$x=3y-5$，得$x_1=-5$，$x_2=4$。因而，$(-5, 0)$和$(4, 3)$是方程组的解。

结式法。

设$f(x,y)=x^2+y^2-25$，$g(x,y)=x-3y+5$。

(1) 将f，g按x的降幂排项。

$f(x,y)=x^2+(y^2-25)$，$g(x,y)=x+(5-3y)$。

(2) 计算$R_x(f,g)$。

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2-25 \\ 1 & 5-3y & 0 \\ 0 & 1 & 5-3y \end{vmatrix}=10y(y-3).$$

(3) 求方程$R_x(f,g)=0$的全部复根。

易其复根是$y_1=0$，$y_2=3$。

(4) 则将$y_1=0$代入该方程组中，得方程 $f(x,0)\equiv x^2-25=0$和$g(x,0)\equiv x+5=0$，其公根$x_1=-5$；

再将$y_2=3$代入该方程组中，得方程$f(x, 3)\equiv x^2-16=0$，$g(x, 3)\equiv x-4=0$，其公根为$x_2=4$。

因而$(-5,\ 0)$和$(4,\ 3)$是方程组的全部复数解。

例6看作实二元方程组时，几何意义很明显，代表平面上以原点为圆心，以5为半径的圆周与一条直线的交点为$(-5,\ 0)$和$(4,\ 3)$。

注意：方程组里若有一个方程关于某未知量是一次的，则可用代入法，代入法与结式法实质上都是消去一个未知量化为一元方程。

同时，也可以通过求$R_y(f,\ g)$来解方程组。即将f和g按y降幂排项，得

$$f(x,y)=y^2+(x^2-25),g(x,y)=-3y+(x+5),$$

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix}1 & 0 & x^2-25\\ -3 & x+5 & 0\\ 0 & -3 & x+5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & x^2-25\\ 0 & x+5 & 3x^2-75\\ 0 & -3 & x+5\end{vmatrix}$$

$$=(x+5)^2+9(x^2-25)=10(x+5)(x-4).$$

$R_y(f,g)=0$的复根为$x_1=-5,\ x_2=4$。

将$x_1=-5$代入原方程，得方程

$$y^2=0\text{和}-3y=0,$$

其公根为$y_1=0$。

将$x_2=4$代入原方程，得方程

$$y^2-9=0\text{和}-3y+9=0,$$

其公根为$y_2=3$。

得解$(-5,\ 0)$和$(4,\ 3)$。

所以，用结式法解二元高次方程组时，即可通过$R_x(f,\ g)$也可通过$R_y(f,\ g)$，视具体情况而定，其结果是相同的。

例7 解方程组

$$\begin{cases} y^2+x^2-y-3x=0, \\ -y^2+6xy+x^2-11y-7x+12=0. \end{cases}$$

解：用结式法。

（1） $f(x,\ y)=y^2+x^2-y-3x=x^2-3x+(y^2-y)$,

$g(x,\ y)=-y^2+6xy+x^2-11y-7x+12$

$=x^2+(6y-7)x+(-y^2-11y+12)$.

（2）

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & -3 & y^2-y & 0 \\ 0 & 1 & -3 & y^2-y \\ 1 & 6y-7 & -y^2-11y+12 & 0 \\ 0 & 1 & 6y-7 & -y^2 11y+12 \end{vmatrix}$$

$=40(y^4-2y^3-y^2+2y)$

$=40y(y-1)\ (y+1)(y-2)$.

（3） $R_x(f,\ g)=0$的根为：0，1，-1，2。

将$y_1=0$代入原方程组，得方程

$x^2-3x=0$和$x^2-7x+12=0$,

其公根为$x_1=3$；

将$y_2=1$代入原方程组，得方程

$x^2-3x=0$和$x^2-x=0$,

其公根为$x_2=0$；

将$y_3=-1$代入原方程组，得方程

$x^2-3x+2=0$和$x^2-13x+22=0$,

其公根为$x_3=2$；

将$y_4=2$代入原方程组，得方程

$x^2-3x+2=0$和$x^2+5x-14=0$,

其公根为$x_4=2$。

因此，方程组的解是(3,0)，(0,1)，(2,-1)，(2,2)。

例8 解方程组

$$\begin{cases} x^2y^2+x^2y+x+y=0, \\ xy^2+xy+1=0. \end{cases}$$

解：(1) $f(x,\ y)=x^2y^2+x^2y+x+y$

$$=(y^2+y)x^2+x+y,$$

$$g(x,\ y)=xy^2+xy+1=(y^2+y)x+1.$$

(2)

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} y^2+y & 1 & y \\ y^2+y & 1 & 0 \\ 0 & y^2+y & 1 \end{vmatrix}=y^3(y+1)^2.$$

(3) $R_x(f,g)$的根只有$y_1=0$和$y_2=-1$（不计重数）.

(4) 将$y_1=0$代入原方程，得方程

$$x=0,\ 1=0,$$

其中之一为矛盾方程，因而无公根（这时，$a_0(y_1)=b_0(y_1)=0$）.

将$y_2=-1$代入原方程，得$x-1=0$ 和 $1=0$，这时也无公根($a_0(y_2)=b_0(y_2)=0$)。

因此方程组无解。

注意：本题$R_x(f,g)=0$的根都是$a_0(y)$和$b_0(y)$的公根，方程组在无解时都会出现这种情况。但反之不然，即若结式的根同时是$a_0(y)$和$b_0(y)$的公根，方程组也可以有解。如方程组

$$\begin{cases} xy=0, \\ x^2y+x-1=0 \end{cases}$$

的结式

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ y & 1 & -1 \end{vmatrix}=-y^2.$$

其根为$y=0$，也是$a_0(y)$和$b_0(y)$的公根，然而方程组有解(1，0)。

习　题　8.8

利用结式的行列式表示，重作§8.5，§8.6，§8.7的习题。

本 章 提 要

1.数域P上的n元多项式环

(1) n元多项式的标准形式：n元多项式可唯一地表为有限个不含同类项的n元单项式的和 $f(x_1, \cdots, x_n)=ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}+\cdots+bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$.

两n元多项式相等，当且仅当它们的标准形式相同(不计项排列次序的不同).

(2) 数域P上n元多项式的全体，称为数域P上的n元多项式环，记为$P[x_1, \cdots, x_n]$.它关于多项式的加、减、乘封闭，并满足通常的算律.

2.多元多项式的排项法

(1) 次数排项法;

(2) 按某一变量的方幂排项法;

(3) 字典排项法.

前两种排项法不能保证项排列的唯一性，而字典排项法则能保证排项的唯一性.

3.对称多项式

(1) 定义：交换任意两个变量，多项式保持不变的n元多项式，称为对称多项式．

(2) 基本定理：n元对称多项式可（唯一地）表为n元初等对称多项式的多项式．

4.结式

(1) 定义：

① 设$f(x)$，$g(x)$为复数域上的多项式，首项系数分别为a_0与b_0，其根分别为α_1，α_2，…，α_n，β_1，β_2，…，β_m．结式

$$R(f,g)=a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j).$$

*② 设有数域P上的多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m.$$

结式是一个$m+n$阶行列式，其元素由a_0，a_1，…，a_n，b_0，b_1，…，b_m及0所组成：

$$\overline{R}(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & \end{vmatrix}.$$

对于复数域上的多项式而言，两者是相等的．

(2) 性质：

① $R(f,g)=a_0^m\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)=(-1)^{mn}b_0^n\prod_{i=1}^{m}f(\beta_i)$.

② $R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$.

* ③ $\overline{R}(f,g)=0$ 当且仅当f和g不互素，或$a_0=b_0=0$．

5.判别式

$f(x)(a_0\neq 0)$的判别式$D(f)$有两种表达式：

（1） $$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2 .$$

其中α_1，…，α_n是$f(x)$的n个复根．

（2） $$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f,f') .$$

$D(f)=0$当且仅当$f(x)$有重根．

6.二元高次方程组的解法

（见 §8.7及 §8.8的四）

复 习 题 八

1.证明以下等式：

(1) $(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1)+(x_1+x_2x_3)(x_2+x_3x_1)(x_3+x_1x_2)=(x_1x_2x_3+1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2x_3-1)$;

(2) $(x_2-x_3)^3+(x_3-x_1)^3+(x_1-x_2)^3=3(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$.

(3) $(x_1+x_2)^3+3x_1x_2(1-x_1-x_2)-1=(x_1+x_2-1)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1+x_2+1)$.

(4) $(x_1+x_2+x_3)^3=(-x_1+x_2+x_3)^3+(x_1-x_2+x_3)^3+(x_1+x_2-x_3)^3+24x_1x_2x_3$.

2.将下列多项式化为标准形，并分别按次数、x_1的方幂以及字典排项法排项：

(1) $x_1(x_2+x_3-x_1)^2+x_2(x_3+x_1-x_2)^2+x_3(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2)(x_1+x_2-x_3)+x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

(2) $(3x_1^2+3x_1x_2-x_2^2)^2-4(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+3x_1x_2+2x_2^2)$;

(3) $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_3x_1+x_3x_2)^2-(x_1+x_2+x_3)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$;

(4) $(3x_1-x_2-x_3)^3+(3x_2-x_3-x_1)^3+(3x_3-x_1-x_2)^3-3(3x_1-x_2-x_3)(3x_2-x_3-x_1)(3x_3-x_1-x_2)$.

3.将下列对称多项式表为初等对称多项式的多项式:

(1) $(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)(x_3^2+x_1^2)$;

(2) $(x_1+x_2+x_3)^4-(x_2+x_3)^4-(x_1+x_3)^4-(x_1+x_2)^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4$;

(3) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

(4) $(x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_2^3x_3+x_2^3x_1+x_3^3x_1+x_3^3x_2$;

(5) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

4 将下列n元对称多项式表为初等对称多项式的多项式:

(1) $\Sigma x_1^3x_2x_3$;

(2) $\Sigma x_1^3x_2^2$;

(3) $(-x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2+(x_1-x_2+x_3+\cdots+x_n)^2+(x_1+x_2-x_3+\cdots+x_n)^2+\cdots+(x_1+x_2+x_3+\cdots-x_n)^2$.

5.已知x_1, x_2, x_3为方程

$$x^3-x^2-4x+1=0$$

的根，试求$x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_1^3x_3+x_2^3x_3$.

6.设x_1, x_2, x_3, x_4为方程

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

的根，试求$\Sigma(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2$.

7.试写出一个方程，使其根是方程

$$x^3+px+q=0$$

的根的立方.

8.设x_1，x_2，x_3和x_4是方程

$$x^4+x^3+1=0$$

的根，试作一个六次方程，使其根为

x_1+x_3，x_1+x_4，x_2+x_3，x_2+x_4，x_3+x_4，x_1+x_2.

9.若三次方程$f(x)=0$根的和为0，求证$-\frac{s_5}{s_3}=\frac{5}{3}\sigma_2$.

10.设x_1，x_2，x_3，x_4和x_5是五次方程$f(x)=0$的根，则有以下等式：

$$\frac{s_1^5-s_5}{s_1^3-s_3}=\frac{5}{3}(\sigma_1^2-\sigma_2).$$

11.试求结式$R(f,g)$，已知：

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-x+2$，$g(x)=x^4-2x^2-3x+4$;

(2) $f(x)=2x^3+x^2-x-1$，$g(x)=3x^2+2x^2+x+1$.

12.试求以下每个多项式的判别式：

(1) x^5-5x^3+5x-1; (2) x^3-x^2-2x+1.

13.当λ为何值时，下列多项式有重根?

(1) $x^3-3x+\lambda$; (2) $x^5-5\lambda x^3+5\lambda^2x-1$

14.试求多项式

$$f(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1.$$

的判别式.

15.解下列二元高次方程组：

(1) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=a^4; \ (a\neq 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+4x+5y-1=0, \\ x^2-7xy+4y^2+8x+10y-2=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 6x^2-xy-2y^2=56, \\ 5x^2-xy-y^2=49; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0, \\ x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-4y-2x+3=0, \\ x^3-x^2+y^3-5y^2+xy+7y-5x-3=0. \end{cases}$

16. 设$f(x)$和$g(x)$为复数域上非零次多项式，求证：

$$D(fg)=[R(f,g)]^2D(f)D(g).$$

17. 从以下方程组中消去x:

(1) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x^2y+xy^2=6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^3-xy-y^3+y=0, \\ x^2+x-y^2-1=0. \end{cases}$

习题答案与提示

习题1.2

1. (1) $3-4i$; (2) $i-7$; (3) 5; (4) 169;

(5) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; (6) $117+44i$; (7) 1.

2. (1) 提示：利用1.(5) 结果；(2)、(3)、(4)、(5) 提示：利用1.(5) 和2.(1) 结果.

3. (1) $x=-\frac{4}{11}$, $y=\frac{5}{11}$; (2) $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{3}$; (3) $x=\frac{4}{3}$, $y=-3$; (4) $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=-3$, $y_2=-1$.

4. (1) $2k_1+k_2=0$; (2) $2k_1+k_2\neq 0$; (3) $2k_1+k_2\neq 0$ 且 $k_1+2k_2=0$.

习题1.3

1. $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$.

2. (1) $10-i$; (2) $1-i$; (3) $2a^3-6ab^2$.

4. 提示：$i^{-n}=\frac{1}{i^n}$.

5. (1) $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$; (2) $\frac{1}{4}$; (3) $-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$; (4) 1.

6. $x=3+i$, $y=3-i$.

7. 提示：用数学归纳法.

习题1.4

2.提示：设$z=a+bi$，则$\overline{z}=a-bi$，$|z|^2=a^2+b^2$.

3.应满足$z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=0$.设$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，则等价于条件$x_1x_2+y_1y_2=0$.几何意义：$z_1$和$z_2$对应的向量垂直.

4. 是一条直线：$2(a-c)x+2(b-d)y=a^2+b^2-c^2-d^2$.

5. (1) $z_1+z_2=1+5i$，$z_1-z_2=3-i$;

(2) $z_1+z_2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})i$，$z_1-z_2=(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})i$; (3) $z_1+z_2=2$，$z_1-z_2=2i$.

6. (1) $\cos 0+i\sin 0$; (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; (4) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

(5) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; (6) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$; (7) $\sqrt{10}\left[\cos(-18°28')+i\sin(-18°28')\right]$.

7. $z=r\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$r\geqslant 0$. 几何意义：第一象限的角平分线.

8. (1) $\sqrt{3}+i$; (2) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$;

(3) $2-2\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}+2)$; (4) $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}+i\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$.

9. $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}ri$，其中$r\geqslant 0$.

10. (1) $4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

（2） $8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$;

（3） $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$;

（4） $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

11.（1） $z=\frac{3}{2}-2i$;（2） $z=\frac{3}{4}+i$.

13. 提示：利用积之模等于模之积的性质和复数0的模为0的特点.

习题1.5

1.（1） $-8i$;（2） $\frac{1}{4}$;（3）$320i$;

（4） $2^n\cos^n\frac{a}{2}\left(\cos\frac{n}{2}a+i\sin\frac{n}{2}a\right)$. 解法如下：

$1+\cos a+i\sin a=2\cos^2\frac{a}{2}+2i\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}\right.$

$\left.+i\sin\frac{a}{2}\right)$. $(1+\cos a+i\sin a)^n=2^n\cos^n\frac{a}{2}\left(\cos\frac{n}{2}a+i\sin\frac{n}{2}a\right)$.

2.（1） 提示：$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

（2） 提示：左端化为$\left(\frac{1+i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}\right)^n=\left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}\right)^n$

$=(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)^n=\cos2n\varphi+i\sin2n\varphi$.

右端化为$\frac{1+i\frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi}}{1-i\frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi}}=\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}=\cos2n\varphi+i\sin2n\varphi$.

(3) 提示：利用本节习题1中(4)的结果. (4) 提示：将左端括号内复数化为三角形式.

3. 对应点将单位圆周等分为 n 部分.

4. (1) n为6的倍数；(2) n不是6的倍数；(3) n 为3的奇数倍.

提示：将$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$化为三角形式，然后利用棣模弗定理.

5. $\cos 5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$, $\sin 5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$.

6. 提示：令$z=\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}$，利用等比级数求和公式求出$z+z^3+z^5+z^7+z^9$以及$z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}$，两和的实部即为$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$.

7. (1) 提示：令$T=2\sin a+4\sin 2a+\cdots+2^k\sin ka$, $S+Ti=1+2(\cos a+i\sin a)+\cdots+2^k(\cos ka+i\sin ka)$. 设$z=\cos a+i\sin a$，则$S+Ti=1+2z+\cdots+2^kz^k$. 也即$S+Ti=\frac{2^{k+1}z^{k+1}-1}{2z-1}$
$=\frac{(2^{k+1}z^{k+1}-1)(2z^{-1}-1)}{(2z-1)(2z^{-1}-1)}=\frac{2^{k+2}z^k-2^{k+1}z^{k+1}-2z^{-1}+1}{4-2(z+z^{-1})+1}$. 比较两端实部，有

$$S=\frac{2^{k+2}\cos ka-2^{k+1}\cos(k+1)a-2\cos a+1}{4-4\cos a+1}.$$

(2) 提示：$\varepsilon S=\varepsilon+2\varepsilon^2+3\varepsilon^3+\cdots+n\varepsilon^n$.

$S-\varepsilon S=1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}-n=\frac{\varepsilon^n-1}{\varepsilon-1}-n=-n$. 故当$\varepsilon\neq1$时，

$S=-\frac{n}{1-\varepsilon}$；$\varepsilon=1$时，$S=\frac{n(n+1)}{2}$.

习题1.6

1．（1） $2\left[\cos\dfrac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{4}\right]$，

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$;

（2） $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5$;

（3） $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)$，$k=0,1,\ 2,\ 3,\ 4$;

（4） $\cos\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{8}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{8}$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 7$;

（5） $\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$;

（6） $\cos\dfrac{2k+1}{3}\pi+i\sin\dfrac{2k+1}{3}\pi$，$k=0,\ 1,\ 2$;

（7） $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+19}{72}\pi+i\sin\dfrac{24k+19}{72}\pi\right)$，$k=0,1,\cdots,5$;

（8） $\dfrac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+5}{93}\pi+i\sin\dfrac{24k+5}{96}\pi\right)$，$k=0,1,\cdots,7$.

2．（1） $z=\sqrt[10]{13}(\cos 11^\circ 15'29''+i\sin 11^\circ 15'29'')\cdot$
$[\cos(72^\circ\cdot k)+i\sin(72^\circ\cdot k)]$，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$;

（2） $z=4\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right)+1$，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

3．提示：设ω_0，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4是某复数z的五次方根，几何上代表正五边形的五个顶点，证明$|\omega_k-\omega_{k-2}|$与k无关（k为任意整数）．

4．提示：证明$(\overline{\omega}_k)^n=\overline{z}$，$k=0,\ 1,\cdots,\ n-1$，同时$\overline{\omega}_k$两两不

同.

习题1.7

1. （1）$\varepsilon_k=\cos\frac{2k}{5}\pi+i\sin\frac{2k}{5}\pi$，$k=0, 1, 2, 3, 4$;
（2） $2\varepsilon_k$，$k=0, 1, 2, 3, 4$.

2. $(\varepsilon_k^m)^n=\varepsilon_k^{mn}=(\varepsilon_k^n)^m=1$；$(\varepsilon_k^{-1})^n=(\varepsilon_k^n)^{-1}$
$=1^{-1}=1$。

3. $(\overline{\varepsilon_k})^n=(\overline{\varepsilon_k^n})=\overline{1}=1$。

4. $\varepsilon^n=1$，设$m=nh$，$\varepsilon^m=(\varepsilon^n)^h=1^h=1$.

5. （1）$i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$，$k=1, 2, \cdots, m-1$.提示：$\frac{z+1}{z-1}$是$m$次单位根；（2）$\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$，$k=1, 2, \cdots, m-1$.提示：$\frac{z+i}{z-i}$是$m$次单位根.

6. （1）$\varepsilon_1=-1$；（2）$\varepsilon_1=i$，$\varepsilon_3=-i$；（3）ε_1，ε_3，ε_7，ε_9；（4）ε_1，ε_5，ε_7，ε_{11}；（5）ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_{12}.

7. 提示：首先，$\bar{\varepsilon}$也是n次单位根；另外，$\bar{\varepsilon}^0$，$\bar{\varepsilon}$，$\bar{\varepsilon}^2$，$\cdots$，$\bar{\varepsilon}^{n-1}$互不相同.

8. 提示：若ε_k为n次单位原根，则ε_{n-k}也是n次单位原根.

9. 提示：利用7、8题结果，以及互共轭的复数的和与积都是实数.

10. 提示：$S=\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$.由于$\varepsilon$是$2n$次单位原根，$\varepsilon^{2n}=(\varepsilon^n)^2=1$，所以$\varepsilon^n=-1$，不能有$\varepsilon^n=1$.因而$S=\frac{2}{1-\varepsilon}$.

11. $\omega\varepsilon^k$，$k=0, 1, 2, \cdots, n-1$.

习题1.8

1.（1）以原点为心，以2为半径的圆周及圆内部分；（2）以

原点为心，1为半径和以3为半径的圆环内部；（3）以(3，0)为心，以2为半径的圆周和圆内部分（除圆心）.(4）以（-2，1）为心以1为半径的圆周.(5)提示：$|z+1|^2=(z+1)\overline{(z+1)}=(z+1)(\bar{z}+1)=|z|^2+z+\bar{z}+1$，$|z-1|^2=(z-1)\overline{(z-1)}=(z-1)(\bar{z}-1)=|z|^2-z-\bar{z}+1$．由于$|z-1|\leqslant|z+1|$，得$|z-1|^2\leqslant|z+1|^2$，即$0\leqslant z+\bar{z}$.设$z=x+yi$，则$z+\bar{z}=2x$.本题解集合的几何意义是右半平面（包括纵轴）.

2.提示：$\left|\frac{2z_1+(3i+4)z_2^2}{3+4i}\right|=\frac{|2z_1+(3i+4)z_2^2|}{|3+4i|}$

$\leqslant\frac{2}{5}|z_1|+\frac{|3i+4|}{5}|z_2|^2\leqslant\frac{1}{5}+2=2.2.$

3．$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$当且仅当z_1与z_2相差一个非负实数因子；$|z_1|-|z_2|=|z_1+z_2|$当且仅当z_1与z_2相差一个非正实数因子，且$|z_1|\geqslant|z_2|$.

4.(1) 由$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$到$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$利用了算术根的性质，此外$\sqrt{-1}=i$和$\sqrt{1}=1$也不完善，因它们的平方根都是两个数.(2) $i=\sqrt{-1}$不妥当，因$\sqrt{-1}=\pm i$，$\sqrt{-1\cdot-1\cdot-1}=\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}\ \sqrt{-1}$也是形式地借用了算术根的性质.

习题1.9

1.(1) i和$-i$都是纯虚数，但$i+(-i)=0$不是纯虚数；(2) $(-2i)+2i=0$模小于1.(3) $\frac{i}{2}+\frac{i}{2}=i$模等于1.以上三问题均破坏了关于加法的封闭性.

2.不能.如$2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=12$不是这个数集里的元素.

3．如$\frac{3}{2^2}\div\frac{5}{2^2}=\frac{3}{5}$不是这个数集里的数.

4. 提示：0和1既在P_1中又在P_2中，因而在P_1和P_2的公共部分中；又P_1和P_2的公共部分中的任意两个数的和、差、积、商（除数不是零）都应既在P_1中又在P_2中，因而在其公共部分中．

6. 包含$\sqrt{2}$的最小数环，是一切形如$a+b\sqrt{2}$的数组成的数集，其中a为偶数，b为整数．须证这个数集是数环，同时，任意包含$\sqrt{2}$的数环一定包括这个数集．包含$\sqrt{2}$的最小数域，是由一切形如$a+b\sqrt{2}$的数组成的数集，其中a，b为有理数．证法同上．

7. 包含i的最小数环是由一切形如$a+bi$组成的数集，其中a，b为整数．包含i的最小数域是由一切形如$a+bi$组成的数集，其中a，b为有理数．

8. 设$a\neq 0$，$a\in A$，则$a+a=2a\in A$，由$2a$的一切整数倍组成的数集显然是数环，且不包含a，因而与A不相等．

复习题一

1. （1）$2\sqrt{35}+38i$；（2）$\dfrac{299}{221}-\dfrac{351}{221}i$；（3）$2a^3-6ab^2$；（4）$2^{12}(1+i)$；（5）$(2-\sqrt{3})^{15}$；（6）$-64$；（7）$2i^{n-1}$；（8）$\cos\dfrac{8k+1}{12}\pi+i\sin\dfrac{8k+1}{12}\pi$，$k=0,1,2$；（9）$\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}}\pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$，共四个解；（10）$\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+17}{72}\pi+i\sin\dfrac{24k+17}{72}\pi\right)$，$k=0,1,\cdots,5$．

2. 提示：$\varepsilon^3=1$．

3. （1）$\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}$；（2）0．提示：利用$1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$的性质，$-\varepsilon^2=1+\varepsilon$；$\dfrac{1}{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}$，原式化为$\dfrac{1-\bar{\varepsilon}^{3n}}{1-\bar{\varepsilon}}=\dfrac{1-(\bar{\varepsilon}^3)^n}{1-\bar{\varepsilon}}$

$=\frac{1-1^n}{1-\varepsilon}=0$.

4. （1） $z_1=1+i$, $z_2=i$;（2）$z_1=i$, $z_2=1$; （3）$i+1$, $2i$; （4）$2i+1$, $1-i$; （5）$z=0$，或z为四次单位根.提示：$|z|^3=|\bar{z}|=|z|$，故$|z|=0$或$|z|=1$.若$|z|=1$，那末$z\bar{z}=1$，但$z\bar{z}=zz^3=z^4$，即$z^4=1$，z是四次单位根；（6）$z=-4.8-2i$.

5. 提示：$z_n=2\cos\frac{2n}{3}\pi$.

6. （1）以(1，1)为心以2为半径的圆内部和以（0，1）为心以2为半径的圆外部的公共部分.（2）单位圆周.提示：

$$z=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}i,\ |z|=1.$$

7. $n=4$.

8. B不是数环，因为B关于乘法不封闭，$(1+i)(1+i)=2i$（不属于B）.B在复平面上代表Ⅰ、Ⅲ象限的分角线.

9. 是数环也是数域.

10. 是数环.提示：验证乘法时，要利用$\varepsilon^2=-1-\varepsilon$的性质.

11. 包含2的最小数环是偶数环；包含2的最小数域是有理数域.

13. 提示：参考定理3的证明.

习题2.1

1. $f(x)=x^3-6x^2+13x-6$.
2. $f(x)=x^3+x+2$.
3. $a=b=d=2$, $c=0$.
4. $a=-3$, $b=2$.

习题2.2

1. （1）$2x^6+6x^4-x^2-2x+1$；（2）x^6+2x^4+3x+1；

(3) $25x-5$; (4) x^3-x^2-x.

2. $a=-1.3, b=\frac{23}{35}$, $c=\frac{37}{14}$.

3. $a=-1.2$, $b=-2.6$, $c=1.2$.

4. 提示：等式两端展开后对应系数相等.

5. $g(x)=\pm(x^2-3x+2)$.

6. 提示：利用待定系数法.先证明如果$f(x)=[g(x)]^2$. 从对应系数相等的方程组中消去a、b就可得出$4q=p^2-4(m+1)$.反之，若$4q=p^2-4(m+1)$，用p和q表示$m+1$代入$f(x)$中，则$f(x)=\left(2x^2-px+\frac{p^2-4q}{4}\right)^2$.

习题2.3

1. $a=-5$.提示：若$(x+1)^2$整除x^5-ax^2-ax+1，则商一定形如x^3+bx^2+cx+1，利用待定系数法求出a, b, c.

2. 提示：若$g(x)$整除$f(x)$，则商一定是$x-q$.参考本节例2.

3. 提示：若$f(x)|g(x)$，则其商为零次多项式.

4. 提示：设$x^4+1=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')=x^4+(p+p')x^3+(q+q'+pp')x^2+(pq'+qp')x+qq'$.$p+p'=0$, $q+q'+pp'=0$, $pq'+qp'=0$, $qq'=1$.解得 (1) $p=p'=0$, $q=\pm i$, $q'=\mp i$; (2) $q=1$, $q'=1$, $p=\pm\sqrt{2}$, $p'=\mp\sqrt{2}$; (3) $q=-1$, $q'=-1$, $p=\pm\sqrt{2}i$, $p'=\mp\sqrt{2}i$.

5. 提示：商一定是$ax+\frac{d}{p}$.

6. 提示：$f(x)=\frac{[2^{n+1}x^{n+1}-(x+1)^n](x+1)^{n+1}}{x-1}$.

7. 提示：用反证法.若整除，则商形如$4x^2+ax-3$，然后，写成方程组，证明该方程组是矛盾的方程组.

习题2.4

1. 商式x^2-x+4，余式$-8x+5$.

2. 商式$4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)$，余式$8-6i$。

3. 商式$\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$，余式$-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

4. $2x^4+x^3+3x^2+6x-4$.

5. x^2-2x.

习题2.5

1. 商式$x^4+2x^3+4x^2+8x+13$，余式25。

2. 商式x^3-3x^2+4x-2，余式1.

3. $\frac{99}{32}$.

4. 不是.

6. 当n为奇数时，$(x+a)|(x^n+a^n)$.

7. $a=-\frac{5}{2}$，$b=-\frac{9}{2}$. 提示：用-1和$+1$代入$f(x)$的值应分别等于3和-2，由此解出a、b.

8. 提示：由于$\cos\alpha+i\sin\alpha$是$x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n$的根，代入后虚部为0，即为欲证的等式.

9. 提示：$f(1)=0$，令$y=x^7$，$(y-1)|f(y)$.

10. 提示：$f(x)=q(x)(ax+b)+r$，令$x=-\frac{b}{a}$，则$f\left(-\frac{b}{a}\right)=q(x)\left(a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)+r=r$.

习题2.6

1. $(x^2+x+1)^2(x-1)+2(x^2+x+1)$.

2. $3(x-1)^3+11(x-1)^2+14(x-1)+5$.

3. $(x-2)^3+8(x-2)^2-3(x-2)-90$.

4. $(x-2)(x^2+x+1)^2+(x+3)(x^2+x+1)-(x+2)$.

5. $(x+4)^3-18(x+4)+13$.

6. $(x-i)^4+4i(x-i)^3-4(x-i)^2+(x-i)-2+i$.

7. $(x-1)^n+C_n^{n-1}(x-1)^{n-1}+C_n^{n-2}(x-1)^{n-2}+\cdots+C_n^1(x-1)$

复习题二

1. 提示：由$f(x)=f(-x)$，得$f(x)-f(-x)\equiv 0$.而$f(x)-f(-x)$不含$f(x)$中的偶次项，只有$f(x)$的奇次项的2倍.因而得出结论.

2. 提示：$f(x)=f(-x)$，再利用上题结果.

3. $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{23}{12}$.

4. 提示：多项式各系数之和等于当$x=1$时的函数值，即等于零.

5. $1+c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2$，$c_2+c_1c_3+c_2c_4+\cdots+c_{n-2}c_n$.

6. 提示：设$f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+cx+d$，则$f(a)=ca+d$，$f(b)=cb+d$，得$c=\frac{r_1-r_2}{a-b}$，$d=\frac{r_2a-r_1b}{a-b}$.

7. $f(x)=2x^4-19x^3+64x^2-89x+42$.

8. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{8}$.

9. 用归纳法.

10. 提示：利用待定系数法，消去其它系数，剩下q和r的关系式.

11. $(x^2-x+1)^2+(2x-3)(x^2-x+1)-3x$.

12. $3(x-2)^3+8(x-2)^2-4(x-2)-3$.

习题3.1

1．（1）x^2-x+1；（2）$2x+3$；（3）$2x^2-3x+4$；（4）$x^2-2\sqrt{2}x-1$；（5）$x+1$．

2．提示：由余数定理，用$-a$代入，两多项式之值皆为零．

4．提示：利用最大公因式是其它公因式的倍式的性质．

习题3.2

1．提示：设$d(x)=(f(x),\ g(x))$，则$h(x)d(x)$整除$h(x)f(x)$和$h(x)g(x)$．由于$d(x)=(f(x),\ g(x))$，则存在$u(x)$及$v(x)$，满足$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，上式两端同乘$h(x)$，利用定理2推出结果．

2．提示：证明$f(x)$与$(g(x),\ h(x))$的公因式和$(f(x),\ g(x))$与$h(x)$的公因式相同．

3．（1）$d(x)=x+1$，$u(x)=\frac{1}{2}$，$v(x)=-\frac{1}{2}$．

（2）$d(x)=x^2+1$．$u(x)=\frac{1}{24}(x-5)$，$v(x)=\frac{1}{24}(-x+6)$．

4．提示：设$(f(x),\ g(x))=d(x)$，则存在$u(x)$和$v(x)$，满足$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，因而$u(x)(f(x)\pm g(x))+(v(x)\mp u(x))g(x)=d(x)$．

习题3.3

1．提示：$f(x)+(-x)g(x)=1$．

2．提示：利用定理1，$u(x)=1$，$v(x)=-1$．

3．提示：利用§3.2习题4结果．

4．提示：利用上题结果．

5．提示：利用本节定理1和上节定理2．

6．提示：利用本节定理1，然后用x^2代替x．

7．提示：利用本节习题第3题结果得$(f, f+g)=1$，$(g, f+g)=1$，再由性质4得证．

8． 提示：f_n和f_{n+1}的公因式一定是$f_{n+1}-f_n$的因式，但$f_{n+1}-f_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$的因式只是$x$的方幂，$x$的正整数方幂显然不能整除$f_n(x)$．

习题3.4

1．提示：先求任意两个多项式的最大公因式，再求它与另一多项式的最大公因式，结果为1．

4．设$d_1=(f_1, f_2)$，$d_2=(f_3, f_4)$，$d=(d_1, d_2)$，先证d是各f_i的公因式，再证d是各f_i公因式的倍式．

5．提示：利用本节定理2．

7． 提示：$\frac{1}{n+1}(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)+\left(-\frac{1}{n+1}\right)(x^n-1)+\left(-\frac{1}{n+1}\right)(x^{n-1}-1)+\cdots+\left(-\frac{1}{n+1}\right)(x-1)=1$，由定理3得证．

8．提示：$(f_1f_2, f_2f_3)=f_2$，而f_2与f_0f_1互素．

习题3.5

1．$(x^2+1)(x^2+2)=x^4+3x^2+2$．

2．$2x^4+x^3+2x+1$．

3．$x^8+x^6-x^2-1$．

5．提示：首先，$0(x)$是公倍式；其次，由于$0(x)$的倍式也是$0(x)$，故得证．

6．提示：$f(x)g(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公倍式应是最小公倍式的倍式，故最小公倍式不是$0(x)$．

7．当$f(x)$与$g(x)$只差一个非常数因子时，$(f(x), g(x))=(f(x),$

$g(x)$].

9. 提示：由于最小公倍式是所有公倍式的因式.

10. 提示：零次多项式是任意多项式的因式.

复习题三

1. x^2-3x-1.

2. x^3+x^2-x-1.

3. 取$u(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$，$v(x)=\frac{1}{4}x$.

4. 提示：若$x+k=(f(x),g(x))$，则$f(-k)=g(-k)=0$，且$f(x)\nmid g(x)$.另外，注意到$f(x)$与$g(x)$的公因式也是$f(x)-g(x)=(a-c)x+(b-d)$的因式.

5. $d(x)=x-3$，$u(x)=1$，$v(x)=-3x-6$.

6. $3x^4-37x^3+140x^2-123x-135$.

7. $(u(x),\ v(x))=1$，$[u(x),\ v(x)]=u(x)v(x)$.

8. $(f(x),g(x))=x^2+x+1$，$[f(x),g(x)]=x^4+x^3-x-1$.五次公倍式可以由最小公倍式任意乘上一个一次式得到，如$x^5+x^4-x^2-x$.

9. 提示：$f(x)-xg(x)=a_n\neq 0$.

10. 提示：设$d_1(x)=(f_1(x),g_1(x))$，$d_2(x)=(f_2(x),g_2(x))$.首先，$d_1(x)d_2(x)$是右边四个多项式的公因式；其次，由$d_1=u_1f_1+v_1g_1$，$d_2=u_2f_2+v_2g_2$相乘，由§3.4定理2得证.

11. 公根为0，1，$-\frac{3}{2}$，其它的根分别是$-\frac{5}{2}$与$-\frac{5}{3}$.提示：公根必是最大公因式的根.

12. (1) -1；(2) -2.提示：有两公根时$(x^2+rx+1)\mid(x^3-2x^2+2x-1)$；有一公根时，最大公因式为一次式.

13. $a=6$，$b=7$.提示：考虑$f(x)-g(x)$.

14. 提示：利用定义.

15. 提示：若$f_1(x),f_2(x)$，$f_3(x)$两两互素，则存在$v_1(x)$，$v_2(x)$，$w_2(x)$，$w_3(x)$，$h_1(x)$，$h_3(x)$满足

$$\begin{cases} f_1(x)v_1(x)+f_2(x)v_2(x)=1, & ① \\ f_2(x)w_2(x)+f_3(x)w_3(x)=1, & ② \\ f_1(x)h_1(x)+f_3(x)h_3(x)=1. & ③ \end{cases}$$

①·$f_3(x)$得$f_3(x)=f_1(x)f_3(x)v_1(x)+f_2(x)f_3(x)v_2(x)$，②·$f_1(x)$得$f_1(x)=f_1(x)f_2(x)w_2(x)+f_1(x)f_3(x)w_3(x)$．代入③，化简为$[w_2(x)h_1(x)]f_1(x)f_2(x)+[v_1(x)h_3(x)+w_3(x)h_1(x)]f_1(x)f_3(x)+[h_3(x)v_2(x)]f_2(x)f_3(x)=1$．分别令上式左端各方括号中的多项式为$u_3(x)$，$u_2(x)$，$u_1(x)$，则条件成立.反之，若条件成立，设$h(x)$为$f_1(x)$与$f_2(x)$的公因式，则易见$h(x)$也是1的因式，因而只能是零次多项式.当多项式个数为n时，两两互素的充要条件是：存在$u_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$，使

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(x)f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_n(x)=1.$$

习题4.1

1. 提示：一次多项式的因式只有一次及零次多项式，即只有当然因式.

2. 提示：若$p(x)$可约，则$cp(x)$也可约；反之亦然.

3. 提示：若x^2+x+1可约，则其非当然因式只能是一次式，因而等价于有实根或有理根.只须证明x^2+x+1无实根，自然就更没有有理根了.事实上，若a是其实根，则$0=a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$·右端恒$\geqslant\frac{3}{4}$，出现矛盾.

4. 提示：由于$p_1(x)$与$p_2(x)$是首项系数为1的不可约多项式，且$p_1(x)\neq p_2(x)$.因而$(p_1(x),p_2(x))=1$.利用性质3可得

证.

5.提示：$x^2-x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$，其中$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$是$-1$的三次虚根.只须证明$x-\varepsilon_1$和$x-\varepsilon_2$都是$x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$的因式，或$\varepsilon_1$及$\varepsilon_2$是其根.注意利用$\varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=-1$.

6. 提示：只须证明$f(0)=f(-1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

7. 提示：$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x+i)(x-i)$.只须证明$-1$，$i$，$-i$是多项式$x^{4m}+x^{4n+1}+x^{4k+2}+{}^{4l+3}$的根.

8. 提示：$x^2+h^2=(x+hi)(x-hi)$.令$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，由于$0=f(hi)=-ah^3i-bh^2+chi+d$，$0=f(-hi)=ah^3i-bh^2-chi+d$，因而$ah^2=c$，$bh^2=d$，或$adh^2=bch^2$，$ad=bc$.

9. 当$3\nmid m$时.提示：x^2+x+1的根是三次单位原根.设$m=3p+k$，讨论$k=0$，1，2三种情况.

10. 是.提示：只须验证$\pm i$都是$f(x)$的根.

习题4.2

1.(1) $x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\cdot(x^2+2)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$;

(2) $x^6+27=(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$

$$=(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)\left(x+\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right).$$

(3) $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2=(x+i)^2(x-i)^2$.

(4) $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)\cdot(x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}\cdot x+1)=(x-1)(x-\varepsilon_1)$

$\cdot(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$，其中$\varepsilon_i$为五次单位根.

2.(1) $(x+1)^2(x^2+1)$，$(x-1)^4(x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4+1)$；

(2) $(x-1)^2$，$(x-1)^3(x+1)^3(x^2+x+1)$；

(3) $(x-1)^2(x+2)$，$(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)(x+5)$；

(4) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^2(x-4)$，$(x-1)^4(x-2)^3\cdot(x-3)^3(x-4)^2$.

3.提示. 将$f(x)$与$g(x)$展成典型分解式，即得$f^n(x)$与$g^n(x)$的典型分解式. 利用本节推论1和推论2证明之.

习题4.3

1.提示：利用定理1的证明.

2.提示：三次多项式可约当且仅当它有一次因式.

3.(1) 作代换$x=y+1$，然后取$p=2$；(2) 取$p=2$；(3) 作代换$x=y-1$；(4) 作代换$x=y-1$，然后取$p=2$；(5) 作代换$x=y+1$；(6) 参考本节例4；(7) 作代换$x=y+1$，取$p=2$.

习题4.4

1.提示：利用定理1和定理2.

2.提示：只须证明$f(x)$与$f'(x)$不互素的充要条件是$p^2-4q=0$.

3.提示：证明$f(1)=0$，$f'(1)=0$.

4.提示：$x^2+2x+1=(x+1)^2$，只须证明$f(-1)=f'(-1)=0$.

5.提示：若有重根a，则a也是$f'(x)$的根，因而是$f(x)-f'(x)$的根，推出矛盾.这是因为$f'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，$f(x)-f'(x)=\dfrac{x^n}{n!}$的根只有0，但$f(0)=1\neq0$.

7. $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{23}{12}$.提示：参考例3

8. $a=-5$.

9. 提示．若$f'(x)|f(x)$，则其商为一次多项式，首项系数为$\frac{1}{n}$，其中n为$f(x)$的次数.故$nf(x)=(x-x_0)f'(x)$.两端求导，得$nf'(x)=f'(x)+(x-x_0)f''(x)$，或$(n-1)f'(x)=(x-x_0)f''(x)$.

$f(x)=\frac{x-x_0}{n}f'(x)=\frac{(x-x_0)^2}{n(n-1)}f''(x)=\cdots=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)$
$=a_0(x-x_0)^n$（因$f^{(n)}(x)=n!\ a_0$）；反之显然.

10. 提示：证$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=0$，但$f^{\mathrm{IV}}(1)\neq 0$.

11. 提示：x^3+px+q与其导式辗转相除，得余式$4p^3+27q^2$.

12. $f(x)=(x-1)(x^2+2)^2$.提示：求出$f(x)$与$f'(x)$的最大公因式x^2+2，x^2+2是$f(x)$的重因式，因而$(x^2+2)^2|f(x)$，又
$\frac{f(x)}{(x^2+2)^2}=x-1$.

13. 提示：$\frac{f(x)}{n!}$属本节习题第5题形式，利用第5题结果.

14. 提示：证$\frac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$是$f(x)$和$f'(x)$的公根.

15. 提示：找出$f''(x)$的根，代入$f'(x)$和$f(x)$.

复习题四

1. (1) 提示：取$p=2$；(2) 提示：作代换$y=x-1$；取$p=3$.
(3) 提示：利用§4.2例4结果；(4) 提示：取$y=x-1$，$p=2$.

2. 提示：只须证明k次单位根（不等于1）都是$x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+\cdots+x^{ka_k+k-1}$的根.

3. 提示：证明1是$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$的根.

4．提示：只须证明k次单位根是多项式$a_0x^{kn}+a_1x^{k(n-1)}+\cdots+a_n$的根．

5．当n被6除余1时．

6．当n被6除余4时．

7．提示：只须证明五次原根都是$x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$的根，$\varepsilon_k^{44}+\varepsilon_k^{33}+\varepsilon_k^{22}+\varepsilon_k^{11}+1=\varepsilon_k^4+\varepsilon_k^3+\varepsilon_k^2+\varepsilon_k+1=0$

8．$a=3$，$b=-4$．

9．$a=n$，$b=-(n+1)$．

10．(1) 三重根；(2) 四重根．

11．$q=\pm 2$．

12．提示：只须注意$f(i)=f(-i)=0$．

13．提示：证明不可约多项式与导式互素，在复数域上仍互素．

习题5．1

1．提示：令$x=a$，b，c时，两端函数值相等．再利用定理1．

2．提示：利用定理1．

3．提示：令$x=1$，0，-1，-2，-3，两端相等，利用上题．

4．提示：令$x=a_1$，a_2，$\cdots$，a_n，两端函数值相等．

5．$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$．

6．(1) $(x+1)(x+2)(x+3)$；(2) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$；(3) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$．

7．(1) $(x-1)(x+1)(x^2-2x+5)$；(2) $(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)$；(3) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{3k+1}{3n}2\pi+1\right)$；(4) $(x^2+x+6)\cdot(x-1)(x+2)$．

8．(1) $x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$；(2) $x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$．

9．（1）$x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-46x+12$；（2）$x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$．

10．其根为$1-i$，$1+i$，1．提示：由于它是实系数方程，虚根成对，所以$1+i$也是根，另一个根是1．

11．提示：由虚根成对定理易得．

习题5.2

1．$x^4-5x^2+4=0$．

2．根为2，2，-3．

3．$x^3-7x^2+17x-15=0$．提示：由虚根成对定理，$2+i$也是它的根，利用这三个根即可作出一个三次方程．

4．根为2，-2，$\frac{3}{2}$．提示：设三个根为α，$-\alpha$，β，由韦达定理列出两个方程．

5．根为2，$\frac{1}{2}$，$2+\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$．提示：设其根为α，$\frac{1}{\alpha}$，β，γ，由根与系数的关系列出方程组．

6．$-\frac{5}{4}$，$-\frac{3}{4}$．

7．$a=-\frac{2}{9}$．提示：$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$．

8．$\lambda=8$．提示　利用本节例7，本题$x_1=\frac{1+\sqrt{15}\,i}{2}$，$x_2=-2$，$x_3=\frac{1-\sqrt{15}\,i}{2}$．

9．$8x^3-x^2+2x+1=0$．提示：$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}$

$=\frac{\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$，$\frac{1}{\alpha_1}\ \frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_1}\ \frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2}\ \frac{1}{\alpha_3}$

$=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, $\dfrac{1}{\alpha_1}$ $\dfrac{1}{\alpha_2}$ $\dfrac{1}{\alpha_3}=\dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$.

10. 根为$2\pm i$, $\pm i$, $-\dfrac{1}{2}$. 提示：虚根成对.

11. 设三个根为α, α, β, 则有

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-a, \\ \alpha^2+2\alpha\beta=b, \\ \alpha^2\beta=-c. \end{cases}$$

因$\alpha\neq 0$, 取$\beta=-\dfrac{c}{\alpha^2}$, 得$2\alpha-\dfrac{c}{\alpha^2}=-a$, $\alpha^2-\dfrac{2c}{\alpha}=b$, 上两式消去$\alpha$, 即得证.

12. 提示：ε_0, ε_1, …, ε_{n-1}是方程$x^n-1=0$的根.

习题 5.3

1. $2y^5-4y^4-y^3-2y^2-y+1=0$.

2. 提示：证明经根反号变换方程不变.

3. $y^6-2y^3+16y^2-128=0$, $8y^5-y^3-2y^2+1=0$.

4. $y^3-15y^2-14y+2=0$. 提示：方程各根乘以k, 然后由问题的要求定出k来.

5. $y^4-60y^2+700y-100=0$.

6. $8y^4-3y^2+12y+2=0$.

7. $x^n-k^n=0$.

8. $3y^5+15y^4+32y^3+34y^2+16y+1=0$.

9. $x=y-\dfrac{a_1}{3}$. 提示：作代换$x=y+C$, 将C视为待定常数, 反求出来.

10. $4y^4+2y^3-y^2-y-2=0$.

11. $Z^4+4Z^3-16Z^2+40Z-32=0$.

习题5.4

1．(1) -2，$1+i$，$1-i$；(2) 2，-1，-1；(3) 1，2，-3；(4) 1，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$；(5) 1，2，3，；(6) 4，$-1\pm 4\sqrt{3}\,i$；(7) -1，$1\pm\sqrt{2}$．

2．提示：利用$x_1=\alpha+\beta$，$x_2=\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon^2$，$x_3=\alpha\varepsilon^2+\beta\varepsilon$，$\alpha^3+\beta^3=-q$，$3\alpha\beta=-p$，可得

$$x_1-x_2=\alpha(1-\varepsilon)+\beta(1-\varepsilon^2)=(1-\varepsilon)[\alpha+(1+\varepsilon)\beta]$$

$$=(1-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon^2\beta)；（由于1+\varepsilon+\varepsilon^2=0）$$

$$x_1-x_3=\alpha(1-\varepsilon^2)+\beta(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon^2)(\alpha-\varepsilon\beta);$$

$$x_2-x_3=\alpha(\varepsilon-\varepsilon^2)+\beta(\varepsilon^2-\varepsilon)=(\varepsilon-\varepsilon^2)(\alpha-\beta);$$

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=3(\varepsilon-\varepsilon^2)(\alpha^3-\beta^3);$$

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27[(\alpha^3+\beta^3)^2-4\alpha^3\beta^3]$$

$$=-27q^2-4p^3.$$

3．提示：系数都是正数，用正数代入函数值均大于零．

4．提示：用负数代入后都小于零．

习题5.5

1．(1) $1\pm\sqrt{3}$，$1\pm 3\sqrt{3}$；　(2) $\frac{1}{3}$，1，3，9；

(3) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$；　(4) $1\pm\sqrt{3}$，$1\pm\sqrt{2}\,i$；

(5) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$．

2．$(x^2+\sqrt{2}\,x+1-\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}\,x+1+\sqrt{2})$．

提示：利用四次方程求根公式的导出过程，把方程$x^4+4x-1=0$分解为两个二次方程

3．提示：任意实数均使左端大于零．

习题5.6

1．(1)-3；(2)无有理根；(3)0，-2，-2，2；(4)0，0，2，2，2；(5)-2，-1，1，1，1．(6)-2，1；(7)-2，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1；(8) 2，$-\frac{2}{3}$；(9)-5，-1，0，8．

2．(1) $\frac{3}{4}$，$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$．提示：先求有理根，再解降次方程．(2)-1，$\frac{3}{2}$，$1\pm i$．

3．$k=-6$，2，-4，3．提示：方程有理根只能是±1，±2，代入方程后求出k值，故k有四个解．

4．提示：若有整根α，则d整除$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha$，推得$d$整除$a_n$．

5．提示：设α为其整根，则$\alpha^n=-(a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n)$，再由素数性质得证（见附录）．

6．(1) 2；提示：利用上题结果，取$p=2$．(2) 无有理根．提示：利用上题结果，取p为7．

复习题五

1．提示：参考§5.1习题第2题解法．

2．-289，-35，-23，-15，13，15，17．

3．$pq=r$．

4．$z^5-2z^4-3=0$．

5．$y^4+(1+4i)y^3-(5-3i)y^2-(2+2i)y+1=0$．

6．$(x-1+i)(x-i)=0$，$(x^2-2x+2)(x^2+1)=0$．

7．提示：由于三根之和为$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$，但$\frac{1}{3}$的一半$\frac{1}{6}$是此方程的一个根，三根是$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$.

8．1，2，3．$a=11$.

9．第三个根是$\alpha\beta$.

10．$x^3-2x^2-1=0$.

11．提示：若有有理根，则必为整根，且是q的因子，因而是奇数.将此根代入左端，成为三个奇数之和，仍是奇数不是零．

12.（1）-3，$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{3}{2}$，-2，-2；（3）2；（4）无有理根；（5）1，3；（6）无有理根；（7）1，-1.

13.（1）-4，$2\pm3\sqrt{3}i$；（2）±1，$\frac{3}{2}$，$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$；（3）2，$\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$；（4）$1\pm2i$，$-2\pm i$；（5）3，1，$1\pm\sqrt{2}$.

14．$-1\pm\sqrt{2}$，$-1\pm\sqrt{2}$.

15．-1，2，3（先求a的值）.

17．提示：参考§5.6例6.

习题6.1

2.提示：若$x\geqslant c$，则$f(x)$是若干正数积的和，因而是正数.

习题6.2（略）

习题6.3

1．$f_1=5x^4-20x^3+27x^2-18x+5$，$f_2=x^3-x$，$f_3=-32x^2+38x-5$，$f_4=-26x+19$，$f_5=-1$．$V(-\infty)=4$，$V(+\infty)=1$.方程有三个实根.

2．提示：证明$V(-\infty)-V(+\infty)=0$．

3．$f_1=4x^3-9x^2-4x+7$，$f_2=43x^2-72x-69$，$f_3=83x-191$，$f_4=1$，$V(-\infty)=4$，$V(0)=2$，$V(\infty)=0$，两个正根，两个负根．分别在区间$(-2,\ -1)$，$(-1,\ 0)$，$(2,\ 2.4)$，$(2.4,\ 3)$内部．

4．$f_1=8(2x^3-3x-1)$，$f_2=6x^2+6x+1$，$f_3=2x+1$，$f_4=1$．$V(-\infty)=4$，$V(-1)=3$，$V(1)=1$，$V(\infty)=0$．所以绝对值小于1的根二个，绝对值大于1的根也是二个．

5．(1)$f_1=3x^2-7$，$f_2=2x-3$，$f_3=1$．三个实根在$(-4,\ -3)$ $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$内．

(2) $f_1=4x^3-1$，$f_2=3x+4$，$f_3=1$．两个实根在$(-1,0)$，$(1,2)$内．
(3) $f_1=x^2-1$，$f_2=2x+1$，$f_3=1$，三个实根在$(-2,1)$，$(-1,0)$，$(1,\ 2)$内．(4)$f_1=4x^3-3x^2-2$，$f_2=3x^2+24x-14$，$f_3=-56x+31$，$f_4=-1$，两个实根在$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$内．

6．$f_1=2x+p$，$f_2=p^2-4q$．(1)$p^2-4q=0$时，有重根$x=-\frac{p}{2}$．
(2)$p^2-4q>0$时，$f_0(-\infty)>0$，$f_1(-\infty)<0$，$f_2(-\infty)>0$；$f_0(+\infty)>0$，$f_1(+\infty)>0$，$f_2(+\infty)>0$，$V(-\infty)=2$，$V(+\infty)=0$，有两个不同的实根．(3)$p^2-4q<0$时，$f_0(-\infty)>0$，$f_1(-\infty)<0$，$f_2(-\infty)<0$；$f_0(+\infty)>0$，$f_1(+\infty)>0$，$f_2(+\infty)<0$．$V(-\infty)=V(+\infty)=1$，没有实根(只有一对共轭虚根)．

7．$f_0=x^n-1$，$f_1=nx^{n-1}$，$f_2=1$．当n为偶数时，$V(-\infty)=2$，$V(+\infty)=0$，两个实根；当n为奇数时，$V(-\infty)=1$，$V(+\infty)=0$，一个实根．

习题6.4

1．正根1个，近似值2.4908．

2．1.7320．

3．0.2679．

复习题六

1. 正根 2 个，负根 3 个. $f_1=5x^4+4x^3-12x^2-6x+3$，$f_2=4x^3+3x^2-6x-2$，$f_3=3x^2+2x-2$，$f_4=2x+1$，$f_5=1$.

2. （1）$f_1=4x^3-8x+1$，$f_2=8x^2-3x-4$，$f_3=87x-28$，$f^4=1$．$(-3,\ -2)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(1,2)$.（2）$f_1=4x^3-3x^2-2$，$f_2=3x^2+24x-14$，$f_3=-56x+31$，$f_4=-1$．$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$．（3）$f_1=x^4-3x^2-4x$，$f_2=x^3+3x^2-1$，$f_3=-2x^2+x+1$，$f_4=-3x-1$，$f_5=-1$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$.（4）$f_1=4x^3-3x^2+2x-1$，$f_2=-5x^2+10x+17$，$f_3=-8x-5$，$f_4=-1$，$(1,\ 2)$，$(-1,\ 0)$．

3. （1）无虚根；（2）4 个虚根；（3）无虚根；（4）2个虚根．提示：次数减去实根个数即为虚根个数．

4. （1）正根上界：$1+\sqrt[4]{2}$，正根个数为1，在$(0,1)$内，近似值为0.4910；（2）正根上界为$1+\sqrt[3]{4}$．正根个数为1，在$(1,\ 2)$内，近似值为1.0953.

习题7.1

1. （1）$-\frac{1}{3}$；（2）$\frac{3x^2-17x-6}{6x^2-17x-3}$；（3）$\frac{x+3}{5x^3-3x^2+12}$；

（4）$\frac{x^2+d^2}{x^2-2b-2c+d^2}$；（5）$\frac{(x-1)(x+2)}{x(x^4-x^2+1)}$；（6）$\frac{(a-1)x}{a^{n-1}(x+2a)}$；

（7）$\frac{x^{n-d}+x^{n-2d}+\cdots+1}{x^{m-d}+x^{m-2d}+\cdots+1}$，其中$d=(m,\ n)$．

习题7.2

1. (1) 1; (2) $\frac{a+1}{ax}$;

(3) $\frac{(x^2+1)(2x+1)}{(x^2-1)(-2x+1)}$; (4) $\frac{1-x}{1+x-x^2}$.

2. (2) 提示：设两分式为A，B，由于$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$，只须证$A^2-AB+B^2=1$即可.

习题7.3

1. (1) $2x^2+3x+11+\frac{25x-5}{x^2+3x+1}$; (2) $\frac{-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}}{3x^2-2x+1}+\frac{3}{9}x-\frac{7}{9}$; (3) $0(x)+\frac{x^2+x+4}{x^3+2x^2-2x+7}$; (4) $x^3-2x^2+3x-3+\frac{5}{x-1}$; (5) $x^2+2x-3+\frac{0(x)}{1}$; (6) $2x^4-6x^3+13x^2-39x+109-\frac{327}{x+3}$; (7) $4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)+\frac{8-6i}{x+1+i}$.

2. (1) $\frac{x+1}{x^3-2}+\frac{1}{(x^3-2)^2}$; (2) $\frac{x^2+1}{x^3+2x+2}+\frac{1}{x+1}$; (3) $\frac{x+1}{x^3+2x+2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$; (4) $-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}$; (5) $-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

习题7.4

1. (1) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$; (2) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}$; (3) $\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x-1}$;

(4) $\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2(x-\sqrt{2})}+\frac{3}{2(x+\sqrt{2})}$.

2. 提示：$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，因而$s_n=\frac{n}{n+1}$.

3. $1-\frac{1}{(n+1)!}$.提示：$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$

4. (1) $\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{21}{(x+3)^3}+\frac{76}{(x+3)^4}-\frac{98}{(x+3)^5}$;
(2) $\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{5}{(x-3)^3}-\frac{7}{(x-3)^4}$; (3) $\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^5}+\frac{2}{x^6}-\frac{4}{x^7}$;
(4) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^4}+\frac{7}{(x-1)^5}$.

5. (1) $-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$; (2) $\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}$; (3) $\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$; (4) $-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-2}$; (5) $-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}$.

习题7.5

1. (1) $\frac{1}{5(x-2)}-\frac{x-1}{5(x^2+2x+2)}$; (2) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{x+3}{x^2-2x+3}$; (3) $\frac{2x+11}{x^2+1}+\frac{2}{x+4}$; (4) $\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$; (5) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}$; (6) $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+x+1}$

2. (1) $\frac{x+2}{x^2+x+2}+\frac{2x+3}{(x^2+x+2)^2}+\frac{3x+4}{(x^2+x+2)^3}$;
(2) $\frac{1}{x-3}-\frac{x+2}{x^2-x+1}-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}$, (3) $-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}$, (4) $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$,

(5) $\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+4)}-\frac{2x}{(x^2+4)^2}$.

复习题七

1.(1) $x+1$; (2) 1; (3) $\frac{1}{x^3}$.

2.(1) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, ε_k 为n次单位根;

(2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; (3) $-\frac{1}{16x}+\frac{1}{8x^2}+\frac{17}{16(x+2)}+\frac{1}{(x+2)^2}$ $+\frac{1}{4(x+2)^3}-\frac{1}{x+1}$; (4) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1-i}{8(x+i)^2}-\frac{5+4i}{8(x+i)}$ $-\frac{5-4i}{8(x-i)}-\frac{1+i}{8(x-i)^2}$; (5) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1-i}{8(x+i)^2}$ $-\frac{5+4i}{8(x+i)}-\frac{1+i}{8(x-i)^2}-\frac{5-4i}{8(x-i)}$.

3.(1) $\frac{x+2}{5(x^2+1)}+\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$; (2) $\frac{2}{x-1}$ $+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}$; (3) $-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$ $+\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{x}{(x^2+x+1)^2}$; (4) $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x+3}{x^2+1}$ $-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$; (5) $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{x}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{x^2-x+1}$ $+\frac{x}{(x^2-x+1)^2}$

习题8.1

6. $x_1^5+x_1^4x_2-2x_1^3x_2^2-x_1^2x_2^3-x_1x_2^4+2x_2^5$

习题8.2

1．提示：先化为标准形式后再排项.

3．如$f_1=x_1^3+2x_1^2x_2-x_2^4$，$f_2=-x_1^3-x_2$，则$f_1+f_2=2x_1^2x_2-x_2^4-x_2$.

习题8.3

1．(1) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$； (2) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3$；(3) $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$；(4) $\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$，提示：不必展开，因为积的首项等于首项之积，用待定系数法.

2．(1) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_1^2\sigma_4-\sigma_3^2$；(2) $\sigma_1^2\sigma_4+\sigma_3^2-4\sigma_2\sigma_4$；(3) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$.

3．(1) $\sigma_1^2-2\sigma_2$；(2) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$；(3) $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$；(4) $\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2+4\sigma_4$；(5) $\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$；(6) $\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$；(7) $\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$.

习题8.4

1．11.

2．-5.

3．-3.

4．$s_1=-1$，$s_2=\cdots=s_n=0$.

5．$s_7=-7\sigma_2\sigma_5$，$s_5=5\sigma_5$，$s_2=-2\sigma_2$.

6．$x^n-ax^{n-1}+\frac{a^2}{2!}x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\frac{a^n}{n!}$.

7．提示：$\sigma_1=0$，$s_3=3\sigma_3$，$s_5=-5\sigma_2\sigma_3$，$s_7=7\sigma_2^2\sigma_3$.

习题8.5

1.(1) 8；(2) 8；(3) 4854；(4) $(b_0a_2-b_2a_0)^2-(b_0a_1-b_1a_0)(b_1a_2-b_2a_1)$.

2.(1) $\lambda=3$或-1；(2) $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$或$\pm2\sqrt{3}\,i$.

3.提示：设$f=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，$g_1g_2$为$m+k$次多项式，则

$$R(f,g_1g_2)=a_0^{m+k}\prod_{i=1}^{n}g_1(\alpha_i)g_2(\alpha_i)=R(f,g_1)R(f,g_2).$$

4.(1) 无，$R(f,g)=233\neq0$；(2) 有，$R(f,g)=0$；(3) 无，$R(f,g)=2^n\neq0$；(4) 有，因$R(f,g)=0$.

5.提示：利用定理3，设β_i是g的根，注意$f(\beta_i)=r(\beta_i)$.

习题8.6

1.(1) 108；(2) -9126；(3) 4360；(4) $3125(b^2-4a^5)^2$；(5) -23^3.

2.(1) $\lambda=1$；(2) $\lambda=3$，$3\varepsilon_1$，$3\varepsilon_2$，其中ε_1，ε_2为3次单位原根；(3) $\lambda=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$；(4) $\lambda=4\pm4i$.

3.提示：设$f(x)=c_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，由判别式定义，$(x-a)f(x)$的判别式等于$c_0^{2n}(a-\alpha_1)^2(a-\alpha_2)^2\cdots(a-\alpha_n)^2$

$$\cdot\prod_{n\geqslant i>j\geqslant1}(\alpha_i-\alpha_j)^2=f^2(a)D(f).$$

4.提示：利用§8.5例4，$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n!)^n$.

5.$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n2^{n-1}+(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)^{n-1}(-n)^n$.提示：$f'=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$.

$$R(f',f)=n^n\prod_{k=0}^{n-2}(2+(1-n)\varepsilon^k),\ 其中\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n-1}+i\sin\frac{2\pi}{n-1}$$

$R(f',f)=n^n[2^{n-1}+(1-n)^{n-1}(-1)^{n-2}]=n^n2^{n-1}+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}(-n)^n$.

习题8.7

1. $(-2,\ 4)$, $(-2,\ 4)$.
2. $(4,\ 2)$.
3. $\left(\frac{13}{3},\ \frac{5}{3}\right)$, $(3,-1)$,
4. $\left(\frac{2}{3}(1\pm\sqrt{7}),\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{7})\right)$, $(-2,\ \pm 2)$.
5. $\left(0,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
6. $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(0,\ -1)$, $(-2,\ 1)$.
7. $(0,\ 1)$, $(3,\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ -1)$.
8. $(1,\ -1)$, $(1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$.
9. 共n^2对解：$x=\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}$, $y=\sqrt[n]{\frac{a-b}{2}}$，其中开方是复数开方.
10. $(0,\ 0)$, $\left(3+\frac{3}{4}\sqrt{19},\ -\frac{3}{4}\right)$, $\left(3-\frac{3}{4}\sqrt{19},\ -\frac{3}{4}\right)$.

复习题八

2. (1) $x_1^3+4x_1x_2x_3+x_2^3+x_3^3$; (2) $x_1^2x_2^2+6x_1x_2^3+9x_2^4$; (3) $x_1^2x_2^2+2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2+2x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2$; (4) $16x_1^3-48x_1x_2x_3+16x_2^3+16x_3^3$.(以上均按字典排项法排项).

3. (1) $\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$; (2) $12\sigma_1\sigma_3$; (3) $2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3$; (4) $\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2$; (5) $\sigma_1^4-4\sigma_1\sigma_2+8\sigma_3$.

4. (1) $\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$；(2) $\sigma_1\sigma_2^2-2\sigma_1^2\sigma_3-\sigma_2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_5$；(3) $n\sigma_1^2-8\sigma_2$.

5. -35. 提示：利用习题8.3第3题 (4) 的结果.

6. $2q^2-6pr+24s$.

7. $x^3+3qx^2+(3q^2+p^3)x+q^3=0$.

8. $x^6+3x^5+3x^4+x^3+4x^2+4x+1=0$.

9. 提示：$s_5=-5\sigma_2\sigma_3$，$s_3=3\sigma_3$.

10. 提示：利用s_1，s_3，s_5用初等对称多项式表达的公式. 注意σ_i和方程系数a_i之间的关系.

11. (1) 0; (2) 59.

12. (1) 28125; (2) 49.

13. (1) $\lambda=\pm2$；(2) $\lambda=\sqrt[5]{\frac{1}{4}+0i}$.

14. $D(f)=(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}n^{n-2}$.

提示：$(x-1)f(x)=x^n-1$. 由§8.6例5，$D(x^n-1)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n(-1)^{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}n^n$. 由§8.6习题3的结果，$D[(x-1)f(x)]=D(f(x))\cdot f^2(1)=n^2D(f(x))$.

15. (1) $(0,a)$，$(a,0)$，$\left(\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}a,\ \frac{1\mp\sqrt{7}i}{2}a\right)$;

(2) $\left(\frac{9\pm\sqrt{77}}{2},\ \frac{9\pm\sqrt{77}}{2}\right)$，$\left(\frac{-3\pm\sqrt{53}}{11},\ \frac{-3\mp\sqrt{53}}{11}\right)$;

(3) $\left(\pm\frac{3\sqrt{35}}{5},\ \frac{\pm2\sqrt{35}}{5}\right)$，$\left(\frac{\pm2\sqrt{21}}{3},\ \frac{\mp\sqrt{21}}{3}\right)$.

(4) $\left(\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{3},\ \frac{-1\pm2\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(2\pm\sqrt{41},\ 2\mp\sqrt{41}\right)$;

(5) $(0,1)$，$(0,3)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1+\sqrt{2}i)$，$(2,1-\sqrt{2}i)$.

16．提示：利用 §8.5（3）式及 §8.6（3）式结果．

17．（1）$y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0$．（2）$5y^5-7y^4+6y^3-2y^2-y-1=0$．提示：求$R_x(f,g)$

#【附录】 整数的整除性

一、定义和性质

1．定义：设a，b是整数，如果存在整数q，使$a=bq$，则称b整除a，或称b是a的因数，记为$b|a$。否则，记为$b\nmid a$。如$2|4$，$-2\nmid 13$。

2．性质：

(1) ± 1整除任意整数。

(2) 任意整数都整除0。

(3) $\pm a$整除a。

(4) 如果a，b互相整除，则$a=\pm b$。

(5) 如果$a|b$，$b|c$，则$a|c$。

(6) 如果$a|b$，$c|d$，则$ac|bd$。

(7) 如果$a|b$，则$|a|\leqslant|b|$ $(b\neq 0)$。

二、带余除法

对于任意整数a与$b(\neq 0)$，存在唯一的一对整数q与r，使$a=bq+r$，$0\leqslant r<|b|$。如$a=14$，$b=-3$，则$q=-4$，$r=2$。

三、最大公因数

1．定义：整数a与b的最大公因数指适合以下条件的整数d：

(1) d是a，b的公因数；

(2) d是a，b所有公因数的倍数。

最大公因数记为$d=(a, b)$，如$\pm 2=(14, 20)$，$\pm 15=(105, -150)$。

2．性质：

(1) 任何整数a，b的最大公因数都存在，且除正负号外是唯一的。

(2) 若$b|a$，则$b=(a, b)$；特别对于所有整数a，有$(a, 0)=\pm a$，$(a, \pm 1)=\pm 1$。

(3) 如果$d=(a, b)$，则存在整数u和v，使$ua+vb=d$。

4．求法（辗转相除法）：

如$a=20$，$b=-12$，则$a=bq_1+r_1$，$q_1=-1$，$r_1=8$；$b=r_1q_2+r_2$，$q_2=-2$，$r_2=4$；$r_1=r_2q_3$，$q_3=2$。得$r_2=4=(20, -12)$。

四、互　素

1．定义：整数a，b如果除了± 1外无其它公因数，则称a与b互素，记为$(a, b)=1$。

2．性质

(1) 如果$(a, b)=1$，$(a, c)=1$，则有$(a, bc)=1$。

(2) 如果$a|bc$，$(a, b)=1$，则$a|c$。

(3) 如果$a|c$，$b|c$，$(a, b)=1$，则有$ab|c$。

(4) $(a, b)=1$当且仅当存在整数u，v，使$ua+vb=1$。

(5) ± 1与任意整数互素。

五、不可分解数

1.定义：异于0和± 1的整数p，如果除± 1与$\pm p$外，无其它因数，则称p为不可分解数。如± 2，± 3，± 5，± 7等都是不可分解数。正的不可分解数，称为素数。

2．性质：

（1）如果p是不可分解数，a是任意整数，则或者a与p互素，或者$p|a$。

（2）如果p是不可分解数，$p|ab$，则a与b至少有一个是p的倍数。

（3）如果p_1和p_2是不可分解数，$|p_1|\neq|p_2|$，a是p_1和p_2的公倍数，则$p_1p_2|a$。

3.因数分解定理：任何异于0与± 1的整数a，可分解为不可分解数的乘积，且除因子顺序和正负号外，这种分解是唯一的。以下称为a的典型分解式：

$$a=\pm p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r},$$

其中p_1，p_2，…，p_r是不同的素数，t_1，t_2，…，$t_r>0$，$r>0$。如$-10000=-2^4\cdot 5^4$，$3388=2^2\cdot 7\cdot 11^2$。

六、最小公倍数

1.定义：整数a，b的最小公倍数是指具有下述性质的整数m：

（1）m是a，b的公倍数；

（2）m是a，b所有公倍数的因数。

最小公倍数记为$m=[a,b]$，如$\pm 100=[25,-50]$，$\pm 12=[-3,-4]$等。

2．性质：

（1） 对于任意整数a，b，最小公倍数总存在，且除正负号外是唯一的。

（2） 如果$(a, b)=d\neq 0$，则$\frac{ab}{d}$是a与b的最小公倍数。

反之，如果$[a, b]=m\neq 0$，则$\frac{ab}{m}$是a与b的最大公因数。

（3） 如果$b|a$，则$\pm a=[a, b]$。特别指出，$0=[a, 0]$，$\pm a=[a, \pm 1]$。

（4） 如果$a|m$，$b|m$，$m\neq 0$，则$m=[a, b]$当且仅当$\left(\frac{m}{a}, \frac{m}{b}\right)=1$。

（5） 非零数a，b互素的充要条件是$ab=[a, b]$。

七、多个整数的最大公因数与最小公倍数

1．定义：整数a_1，a_2，…，a_n的最大公因数，是指适合以下条件的整数d：

（1） d是各a_i的公因数；

（2） d是各a_i所有公因数的倍数。a_1，a_2，…，a_n的最大公因数，记为

$$d=(a_1, a_2, \cdots, a_n)。$$

整数a_1，a_2，…，a_n的最小公倍数，是指适合以下条件的整数m：

（1） m是各a_i的公倍数；

（2） m是各a_i所有公倍数的因数。a_1，a_2，…，a_n的最小公倍数，记为

$m=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$。

2．性质：

(1) 对于任意整数a_1，a_2，…，a_n，其最大公因数与最小公倍数总存在，且除正负号外是唯一的。

(2) $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=((\cdots((a_1, a_2), a_3), \cdots), a_n)$。

(3) $[a_1, a_2, \cdots, a_n]=[[\cdots[[a_1, a_2], a_3], \cdots], a_n]$。

(4) 如果$d=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则存在整数$u_1$，$u_2$，…，$u_n$，适合

$$d=u_1a_1+u_2a_2+\cdots u_na_n。$$

八、整体互素与两两互素

1．定义：设有整数a_1，a_2，…，a_n，如果它们除 ± 1 外，无其它公因数，则称其整体互素；如果它们任意两个互素，则称其两两互素。

如20，15，12，100整体互素，但不是两两互素，而121，20，51，49两两互素，也整体互素。

2．性质：

(1) 两两互素则整体互素，反之则不然。

(2) 若a_1，a_2，…，a_n两两互素，则

$$a_1a_2\cdots a_n=[a_1, a_2, \cdots, a_n]。$$

(3) 若$d\neq 0$是a_1，a_2，…，a_n的公因数，则d是最大公因数的充要条件是：

$$\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \cdots, \frac{a_n}{d}\text{整体互素。}$$